EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar



jaargang 87

nr 6

mei 2012

NWO's keuken deel 2

Wiskunde digitaal

Nederland kampioen?

Wiskunde-C dag

Uit de Zebrareeks

Wiskunde-C op havo?

Artikelen samen met 'Volgens Bartjens'

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 6

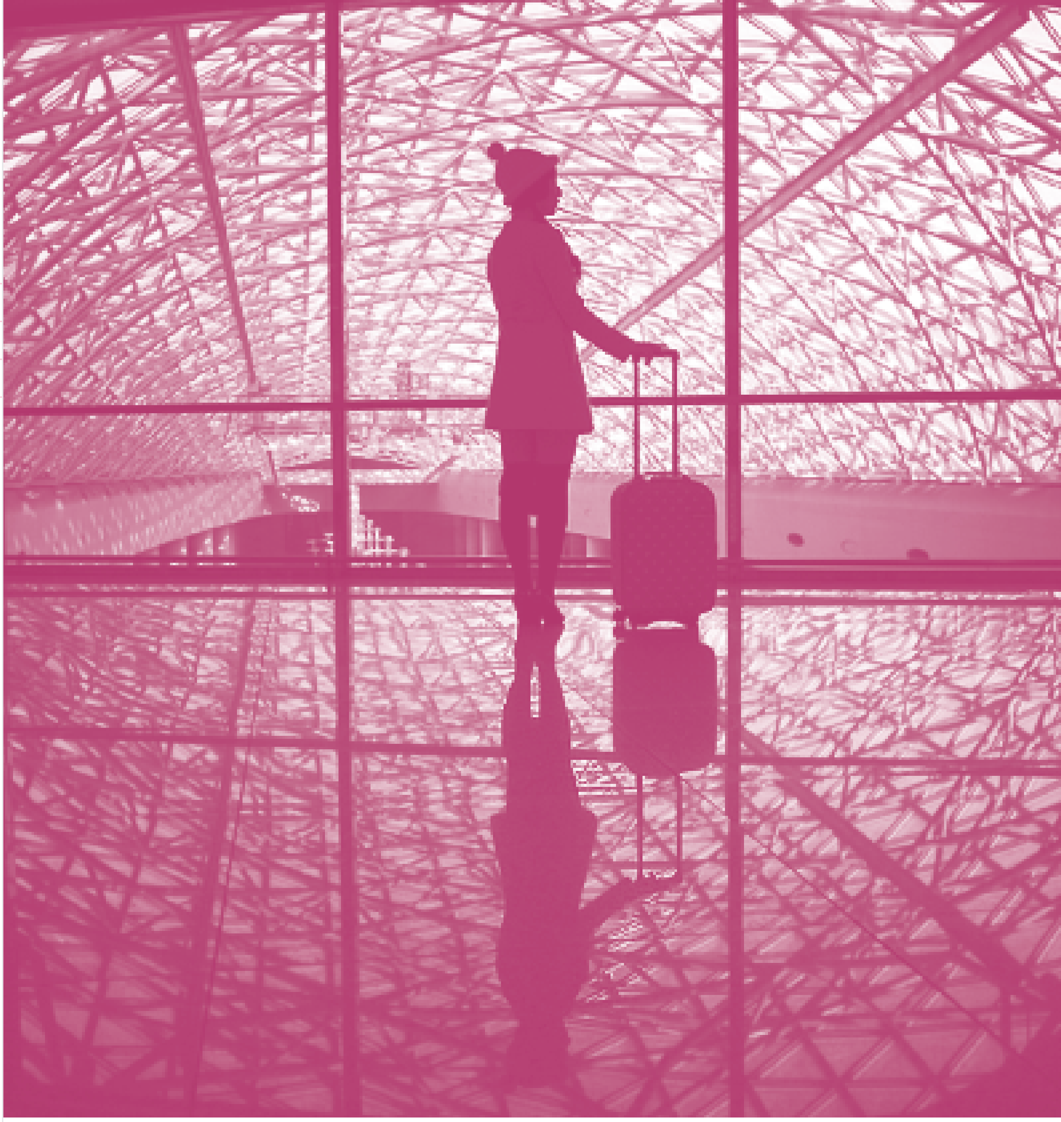
mei

2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394



Redactie

Michel van Ast

Rob Bosch

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Ernst Lambeck

Marjanne de Nijs, hoofdredacteur

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Rekentoetstoestanden
In de wandelgangen is er veel onduidelijkheid over de inhoud van de komende rekentoetsen en de implementatie. De rekentoets-pilots hebben daar niet veel verbetering in gebracht. De voorbeeldtoetsen in de servicedocumenten lijken niet overeen te komen met de Cito-toets. Het convergeert langzamerhand naar wat de bedoeling is van het 'Rapport Doorlopende leerlijnen rekenen', maar we zijn er nog niet. Door de snelheid waarmee een en ander wordt ingevoerd, sluiten methodes nog onvoldoende aan op de toetsen. Ook de digitale toetsomgeving ExamenTester werkt niet overal naar behoren. Dan is er ook nog de 3F/3S-kwestie voor het vwo. Lukt het de Rekentoetswijzercommissie 3S om voor de zomervakantie de rekentoetswijzer 3S te publiceren? Op basis daarvan en een veldraadpleging beslist de minister over het te toetsen niveau op het vwo. Naar aanleiding van verontrustende signalen van diverse mbo-instellingen is de MBO-Raad gestart met een inventarisatie van de knelpunten die opleidingen ondervinden bij de implementatie van de referentieniveaus. In het in maart j.l. verschenen document van de CvE, Implementatie referentieniveaus taal en rekenen in eindexamen vo, staat dat aan scholen, na de pilot, een *voorbeeldtoets* ter beschikking gesteld wordt, voor zowel 2F als 3F. Zodra de toetsen beschikbaar zijn zullen we u informeren.

Volgens Bartjens – Euclides
In *Euclides* nummer 2 schreef ik in mijn kort vooraf: 'Met het invoeren van de rekentoetsen in het vo gaat de muur tussen basisschool en vo meer omlaag. We kijken er steeds beter overheen. Kennis over het rekenonderwijs op de basisschool is essentieel om onze rekenlessen goed vorm te kunnen geven.' De hoofdredacteur van *Volgens Bartjens*, Cathe Notten, nodigde me uit die muur nog meer af te breken en samen te werken. Het resultaat vindt u in deze *Euclides* maar ook in de tweede 'Special VO en MBO' die *Volgens Bartjens* dit voorjaar uitgeeft. *Volgens Bartjens* heeft een lange historie als het tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en deze ervaring kunnen we goed gebruiken nu de rekentoetsen een belangrijk onderdeel van de examens in het vo en mbo worden. U herkent de gemeenschappelijke artikelen aan het bijgevoegde VB-logo, het onderwerp en – uiteraard – de inhoud.

Rekenen met Bartjens
Monica Wijers en Vincent Jonker informeren u over rekenen in andere vakken. Jurriaan Steen breekt een lans voor de inzet van het mobieltje als rekenmachine en Sabine Lit en Martine den Engelsen voerden een vergelijkend warenonderzoek uit onder de websites met oefenprogramma's. Op het PIUS X zijn ze al een tijd bezig met het versterken van hun rekenonderwijs: Bronja Versteeg en Bert van de Wal delen hun ervaringen met ons. Een mooi initiatief is bijvoorbeeld De Rekenbrug, een platform dat is opgezet om rekeninhoud en didactiek af te stemmen in doorgaande leerlijnen van po naar vo. Rianne Reichardt en Frank Haacke doen verslag van het pilotexamen 3F op het ROC Eindhoven. We selecteerden voor u 2F en 3F vraagstukken van diverse rekenmethoden en vroegen Victor Schmidt en Monica Wijers als deskundigen hoe zij tegen deze opgaven aankijken. Frans Ballering zoomt in op het metriek stelsel met betekenisvolle problemen waar leerlingen mee aan de slag kunnen. Een praktisch hulpmiddel voor docenten is het Rekenwerkgesprek: Ria Brandt en Henk Logtenberg laten zien hoe een leerling hierdoor weer grip kan krijgen op rekenopgaven. En nog een verslag uit de praktijk: De instructie staat centraal; Marianne Espeldoorn, Joop Vaneker en Peter ten Dam laten zien hoe het rekenonderwijs vorm krijgt op het vmbo binnen de scholengemeenschappen De Grundel en Twickel.

Rubrieken
Dan, zonder de andere auteurs te kort te doen, graag uw aandacht voor twee nieuwe rubrieken. Rob van Oord zal ons elk nummer informeren over zijn ervaringen met een Zebraboekje in 'Uit de Zebrareeks…'. We hopen dat het u inspireert om de boekjes (nog) meer in de lessen te gebruiken. Daarnaast starten we met een rubriek 'Wiskunde digitaal' om u te informeren over *apps* die op de markt zijn en die in te zetten zijn voor uw wiskunde- of rekenonderwijs. Lonneke Boels geeft de aftrap met Koko Math.

Veel leesplezier met dit 'dubbele' nummer.

Met dank aan
Cathe Notten, hoofdredacteur *Volgens Bartjens*, Jaap Vedder, voorzitter NVORWO, Johan van den Berg, Steunpunt taal en rekenen vo, en Rianne Reichardt, Steunpunt taal en rekenen mbo.

Inhoud

Bij deze Euclides ontvangt u tevens de eerste special die Volgens Bartjens in samenwerking met de steunpunten taal en rekenen in november 2011 uitbracht.

Een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade

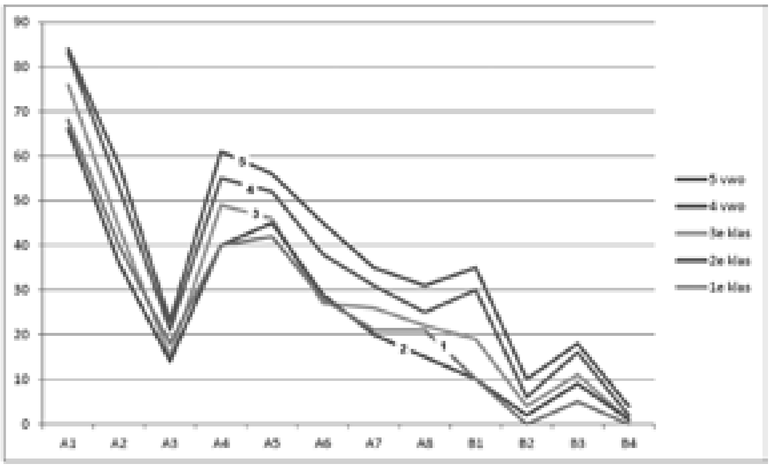
DEEL 2

[Quintijn Puite]

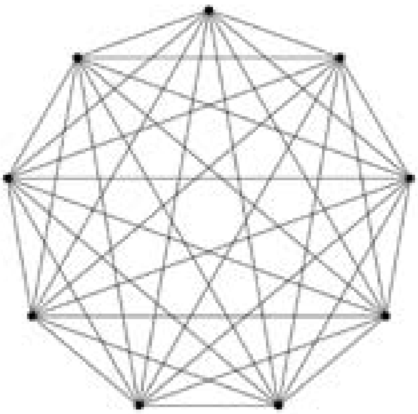
Op vrijdag 27 januari j.l. deden op 270 scholen 5612 leerlingen, onder wie 2013 meisjes (36%), mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De beste 815 deelnemers zijn uitgenodigd om mee te doen aan de tweede ronde, die op vrijdag 23 maart op 12 universiteiten in het hele land plaatsvond. De opgaven van de tweede ronde treft u hierbij aan (zie figuur 7 op pag. 232).

In dit artikel bekijken we enkele opvallende statistieken die betrekking hebben op de *eerste* ronde.
De opgaven van de eerste ronde 2012 staan in de vorige editie van *Euclides* (nr. 87(5), pag. 193). Uitwerkingen van de eerste en de tweede ronde zijn te vinden op « *www.wiskundeolympiade.nl* ».

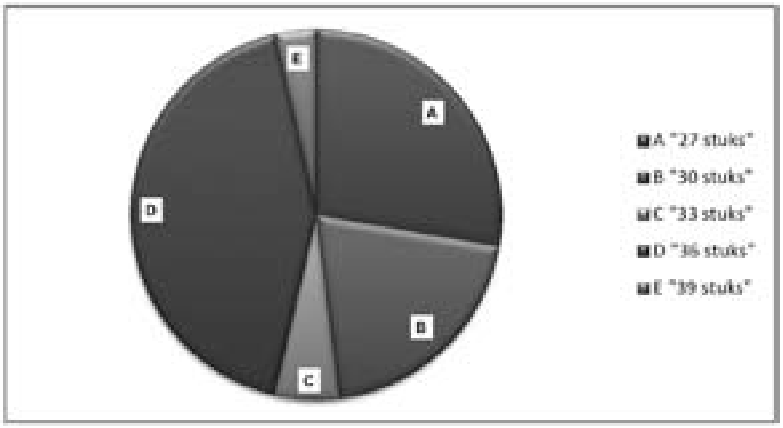
In figuur 1 ziet u het percentage van de kandidaten dat een bepaalde opgave goed had, uitgesplitst per klas. Wegens de relatief lagere deelnemersaantallen en voor de overzichtelijkheid hebben we daarin 5-havo en 4-havo buiten beschouwing gelaten. Wat opvalt is de grotendeels dalende lijn, hetgeen aangeeft dat de opgaven behoorlijk op moeilijkheid waren gerangschikt. Maar A3 is hierop een grote uitzondering. Vrijwel alle klassen vonden deze opgave behoorlijk lastig; slechts ca. 1 op de 5 leerlingen uit elke categorie wist deze opgave te kraken. Hoe is dat te verklaren?
De opgave ging over het aantal gelijkbenige driehoeken dat te vinden is in een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen (***zie figuur 2***). Van de deelnemers antwoordde 43% optie D (36 stuks), vervolgens 28% optie A (27 stuks), en slechts 20% het correcte antwoord B (30 stuks); ***zie figuur 3***.
De enige andere A-opgave waarvan één van de foute antwoordopties vaker werd gekozen dan het goede antwoord, was opgave A7 over de zes kaartjes met positieve gehele getallen (waar B vaker werd gekozen dan het goede antwoord D).
Vermoedelijk hadden een hoop deelnemers bij opgave A3 wel de slimme strategie bedacht om te kijken hoeveel gelijkbenige driehoeken er per hoekpunt zijn. Dat zijn er 4 – zie de zwarte (Z), rode (R), blauwe (B) en groene (G) driehoek ***in figuur 4***. En 9 maal 4 is 36, dus zo kom je tot antwoord D.
Anderen hebben wellicht de gelijkzijdige driehoek (de blauwe, B) niet meegeteld omdat ze dachten dat die niet gelijkbenig was en kwamen zo tot 9 maal 3 is 27, dus antwoord A. Maar de opgavencommissie had – om dit te voorkomen – juist expres bij de opgave een opmerking gezet dat een driehoek gelijkbenig is als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben. Dus wat ook zou kunnen, is dat de mensen die op A uitkwamen juist de eerste methode (die tot antwoord D leidde) hebben gevolgd, maar zich realiseerden dat je dan de gelijkzijdige driehoek meerdere keren tegenkomt (namelijk 3 en 6 hoekpunten verder), waarna ze zich maar tot 9 maal 3 is 27 hebben beperkt. Tsja, dan ben je er bijna, want die gelijkzijdige driehoeken moeten natuurlijk wel worden meegeteld. Maar dan wel slechts één keer elk; dus het correcte antwoord is 27 + 3 = 30. Het addertje onder het gras (het dubbeltellen van de gelijkzijdige driehoek) maakte dit toch al niet-triviale telprobleem (hoe ga je zoiets überhaupt tellen?) blijkbaar een stuk lastiger dan vooraf was ingeschat door de opgavencommissie.
Bij opgave A8 over patroon herkennen in de rij 27, 1, 2012, 26, 0, 2011, …, waarover Birgit van Dalen in de vorige editie van *Euclides* schreef, valt het op dat de eersteklassers beter scoren dan de tweedeklassers. Het was wel een van de pittigste A-opgaven, maar blijkbaar konden jongere leerlingen hier bijna net zo goed mee uit de voeten als de leerlingen met al wat meer wiskundige bagage.
Tot slot valt bij de B-opgaven op dat B3 beter is gemaakt dan B2. Opgave B2 was een behendige plak-en-knipmeetkunde opgave waarin een halve cirkel en een overlappende gelijkzijdige driehoek de hoofdrol speelden, terwijl het er bij B3 om ging voor welke rechthoeken in het rooster er geldt dat er evenveel hokjes wel als niet aan de rand van de rechthoek liggen. (In feite werd er gevraagd naar het aantal hokjes van zulke rechthoeken.) Hoewel B3 algebraïsch nog best pittig is, kon men hier ook met goed proberen uitkomen, iets wat niet gold voor B2. Als opgave B3 echter in de tweede ronde zou hebben gezeten als C-opgave, dan was een volledige uitwerking nodig geweest en hadden de leerlingen dus echt moeten bewijzen dat de antwoorden 48 (8 maal 6) en 60 (12 maal 5) de *enige* mogelijkheden zijn; ***zie figuur 5 en figuur 6***. De opgave was dan waarschijnlijk veel moeilijker geweest. Maar nu was het voldoende als men, op wat voor manier dan ook, deze oplossingen vond, bijvoorbeeld meetkundig zoals in de illustraties.



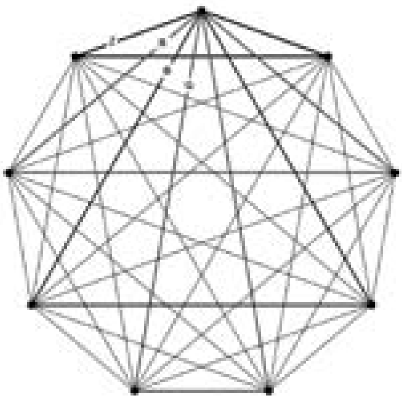
figuur 1 Percentage goede antwoorden per opgave, per categorie



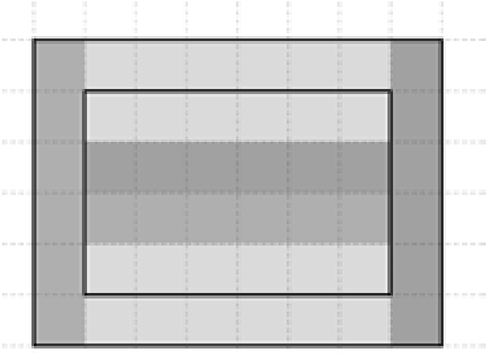
figuur 2 Regelmatige negenhoek met alle diagonalen



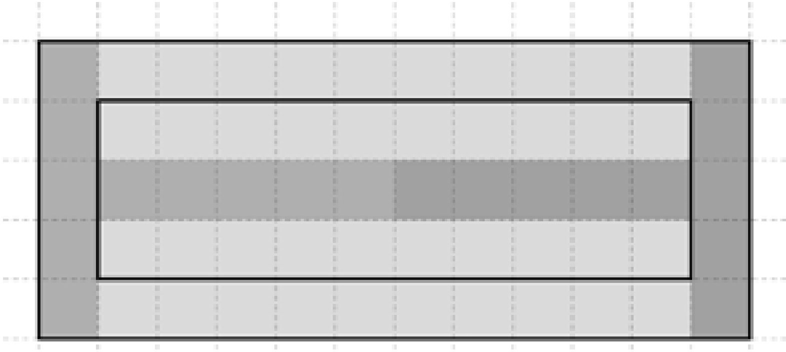
figuur 3 Verdeling van de antwoorden gegeven bij opgave A3



figuur 4



figuur 5



figuur 6

B-opgaven

Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of 5^8 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+\pi)$.

B1. In deze optelsom staat elke letter voor een cijfer (0 tot en met 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers.
Bepaal de waarde van W × R.

```
T W E E D E
  R O N D E +
------------
2 3 0 3 1 2
```

B2. Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

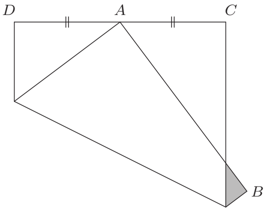
B3. Eén van de vier kabouters Anne, Bert, Chris en Dirk heeft goud gestolen van de koning. De kabouters, die elkaar door en door kennen, doen hierover elk twee uitspraken. Als een kabouter een leugenaar is, is minstens één van die twee uitspraken een leugen. Is een kabouter geen leugenaar, dan zijn beide uitspraken waar.

Anne zegt: "Bert is een leugenaar." en "Chris of Dirk heeft het gedaan."
Bert zegt: "Chris is een leugenaar." en "Dirk of Anne heeft het gedaan."
Chris zegt: "Dirk is een leugenaar." en "Anne of Bert heeft het gedaan."
Dirk zegt: "Anne is een leugenaar." en "Bert of Chris heeft het gedaan."

Hoeveel van deze acht uitspraken zijn waar?

B4. Op elk van de 10.000 velden van een 100×100-schaakbord staat een getal. Op de bovenste rij staan van links naar rechts de getallen 0 tot en met 99. In de linkerkolom staan van boven naar beneden de getallen 0 tot en met 99. De som van vier getallen in een 2×2-blokje is altijd 20.
Welk getal staat helemaal rechtsonder op het bord?

B5. Een vierkant $ABCD$ met zijde 8 wordt zodanig gevouwen dat hoekpunt A met het midden van CD samenvalt (zie figuur).
Wat is de oppervlakte van het grijze driehoekje?



C-opgaven

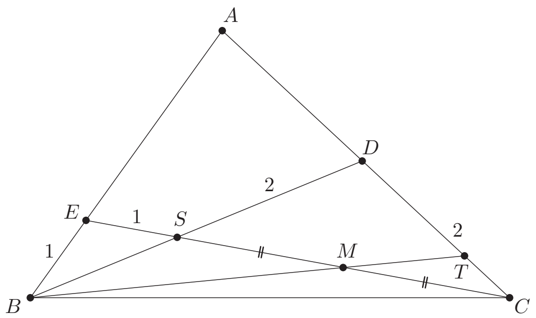
Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Je hebt één kaartje met daarop het getal 12. Je mag nieuwe kaartjes toevoegen aan je verzameling volgens de volgende regels.

- Als je al een kaartje met een getal a hebt, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $2a+1$.
- Als je al een kaartje met een getal b hebt dat deelbaar is door 3, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $\frac{b}{3}$.

(a) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal 29 kunt maken.
(b) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal $2^{2012}-1$ kunt maken.
(c) Laat zien dat je nooit een kaartje met daarop het getal 100 kunt maken.

C2. Gegeven is een driehoek ABC met op lijnstuk AC een punt D en op lijnstuk AB een punt E. Het snijpunt van BD en CE noemen we S. Het midden van lijnstuk CS noemen we M. De lijn BM snijdt lijnstuk CD in punt T. Ten slotte is gegeven dat $|BE| = |ES| = 1$ en $|CD| = |DS| = 2$.
Bewijs dat $|AB| = |AT|$.
Je moet je redenering stap voor stap in tekst en formules opschrijven. Dingen die alleen in het plaatje aangegeven zijn, leveren geen punten op.



figuur 7 Opgaven NWO 2012, 2e ronde

Over de auteur
Quintijn Puite is een van de organisatoren van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, waarvoor hij twee dagen per week verbonden is aan de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij docent bij de Vakgroep Wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *quintijn@wiskundeolympiade.nl*

Uit de Zebrareeks...

[Rob van Oord]

De redactie van de Zebrareeks valt onder verantwoordelijkheid van de NVvW. Deze reeks is bij uitstek geschikt om te gebruiken als basis voor een keuzeonderwerp of als aanzet voor een praktische opdracht. Vanwege de grote diversiteit van de onderwerpen is er voor elk wat wils maar dat maakt het ook lastig kiezen. Om het u makkelijker te maken zetten we in de komende nummers van *Euclides* telkens een andere Zebra in de schijnwerpers. Wie weet zet het u aan tot een (nog) intensiever gebruik van deze unieke boekjes.



Hoe gebruik ik de Zebra bij mijn lessen?
In mijn klassen 6-vwo moet elke leerling eind oktober een boekje uit de Zebrareeks kiezen. Maximaal twee (groepjes) leerlingen per boekje. In de maanden februari en maart moeten zij daarover in de les een presentatie van maximaal 15 minuten geven. Ik neem in die periode per groep één les per week voor drie presentaties, waarop ze tevoren hebben ingetekend. In mijn klassen 6-vwo met wiskunde-A mogen leerlingen ook in tweetallen een boekje kiezen; in de wiskunde B-groep moet ieder individueel een boekje doorwerken en presenteren. Om ze goed voor te bereiden op hun vervolgstudie laat ik ze zelf de boekjes met de eventuele opgaven helemaal doorwerken. Daarna wordt, in overleg met mij, een eindopdracht gekozen. In hun presentatie moeten zij eerst iets over het boekje als geheel vertellen en daarna hun eindopdracht presenteren. Ik probeer aan het eind van de presentatie met een kritische vraag door te prikken in hoeverre ze het echt begrepen hebben. Meteen na afloop geef ik een voorlopig cijfer. Aan de hand van de ingeleverde schriften met gemaakte opgaven en een logboek stel ik het eindcijfer vast. Dat wijkt hooguit 1 punt af van het voorlopige cijfer. Meestal variëren de cijfers van de 7 tot 9. De meeste leerlingen zien het een als goede mogelijkheid om hun schoolexamencijfer iets op te krikken.

Boekje 1 – Kattenaids en Statistiek
Auteurs: Jan van den Broek en Peter Kop
Onderwerp: statistiek en toetsen van hypotheses, (standaard)normale verdeling
Benodigde voorkennis: binomiale kansverdeling, normale kansverdeling

Waarover gaat het boekje?
Eerst wordt er uitgelegd hoe je een binomiale toets van een steekproeffractie moet uitvoeren. Vervolgens worden twee populatiefracties vergeleken door naar het verschil van beide nulhypotheses te kijken. Als laatste worden twee populatiegemiddelden van continue variabelen getoetst. In alle gevallen wordt gebruik gemaakt van de standaardnormale verdeling, waarvan voor Z-waarden ≥ 0 achter in het boekje een tabel is opgenomen van $P(Z \leq z)$. Er moeten allerlei formules worden doorgewerkt waarmee de standaardfouten en overschrijdingskansen worden berekend. Deze kansen heten in het boekje eenzijdige of tweezijdige p-waardes.
In het boekje wordt gebruik gemaakt van gegevens uit een onderzoek uit 1993 aan de Universiteit Utrecht over katttenaids, het FIV-virus, dat het immuunsysteem van katten aantast. Dit virus is vergelijkbaar met het HIV-virus bij mensen.

In dit boekje wordt gekeken hoe je twee groepen katten, zwerfkatten (gevonden katten) en huiskatten (gebrachte katten) kunt vergelijken met betrekking tot het voorkomen van kattenaids. Hierbij wordt gekeken naar een discrete toetsingsgrootheid. Je kunt van beide groepen katten ook de leeftijden vergelijken. De leeftijd is een continue grootheid.

Als aanloop wordt eerst het toetsen van hypotheses van een populatiefractie behandeld. In alle gevallen wordt $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ als toetsingsgrootheid gebruikt. Deze Z is steeds standaardnormaal verdeeld, met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$, en daarmee kunnen de p-waarden (overschrijdingskansen) berekend worden. Hierna kan een beslissing genomen om H_0 te verwerpen of niet.

Hoe zit het boekje in elkaar?
De onderdelen van de stof die in het boekje behandeld worden, zijn per hoofdstuk gerangschikt. Elk volgend hoofdstuk bouwt voort op het vorige op een prettige en logische manier. Van elk hoofdstuk staan de antwoorden achterin. Voor de leerlingen is het boekje dan ook goed zelfstandig door te werken. Het boekje sluit af met een eindopdracht, zonder antwoorden.

De behandelde stof in het kort
Wanneer je slechts gegevens hebt van een steekproef ter grootte van n, uit een populatie, dan kun je aan de hand van die gegevens toch enkele nuttige uitspraken doen over de gehele populatie. Zo kun je met de steekproeffractie P, dat is de fractie katten met kattenaids in de steekproef, een schatting geven van de populatiefractie π.
In de eerste hoofdstukken wordt uitgegaan van een bepaalde populatiefractie. Er wordt stap voor stap verteld wat je moet doen. Onder bepaalde voorwaarden kun je ervan uitgaan dat de steekproef binomiaal verdeeld is, en bij grote aantallen wordt die benaderd door de normale verdeling, zonder continuïteitscorrectie.
Stel dat je uitgaat van de populatiefractie π = 0,02, dan is bij een steekproef met

n = 723 de kans dat er 20 of minder katten het virus bij zich dragen $P(X \leq 20)$. Deze kans wordt berekend met de verwachtingswaarde van het aantal in de steekproef, $E(X) = n \cdot \pi = 14{,}46$ en de standaardafwijking van de binomiale verdeling $\sigma_X = \sqrt{n \cdot \pi \cdot (1-\pi)} = 3{,}76$. De Z-waarde is de gestandaardiseerde X, met $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$. Z is het aantal standaardafwijkingen (in het boekje wordt dit aantal standaardfouten genoemd) dat de waarde van X afligt van de verwachtingswaarde $E(X)$.
Omdat bij het ontstaan van de Zebrareeks nog niet bekend was dat de normale verdeling voor elke willekeurige waarden van μ en σ op de grafische rekenmachine berekend konden worden, heeft men in dit boekje de tabel voor de standaardnormale verdeling met $Z > 0$ als bijlage opgenomen. Op zich erg omslachtig maar voor leerlingen een uitdaging om te begrijpen wat er allemaal gebeurt. Te overwegen valt om leerlingen te vertellen dat deze kansen sneller met behulp van de GR berekend kunnen worden.
De kans $P(X \leq 20)$ is nu als volgt te berekenen: eerst $Z = \frac{20 - 14{,}46}{3{,}76} = 1{,}47$, dan opzoeken in de tabel (***zie figuur 1***): in de horizontale rij van 1.4 in de kolom onder .07 vind je de kans van 0,9292.
Hierna wordt ingegaan op de kansverdeling van de steekproeffractie P. Deze wordt ook benaderd met de normale verdeling en heeft dan volgens de $\sqrt{n}$-wet een verwachtingswaarde $E(P) = \pi$, en standaardafwijking

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot (1-0{,}02)}{723}} = 0{,}0052$$

Vervolgens kan de kans weer op analoge wijze met behulp van de Z-waarde en standaardnormale verdeling berekend worden. In de volgende hoofdstukken wordt verteld wat hypothese toetsen inhoudt. Hierbij is het van het grootste belang dat de steekproef goed en aselect wordt genomen. De steekproef is als het ware een soort 'jury' die gaat beslissen of H_0 verworpen gaat worden of niet. De waarnemingen van de steekproef worden samengenomen tot een toetsingsgrootheid, hier de steekproeffractie. Stel er is sprake van een tweezijdige toets, dan is de nulhypothese $H_0 : \pi = 0{,}02$ (ook wel

De tabel voor de standaard normale verdeling

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

figuur 1 Tabel uit Zebra-1 (pag. 57, gedeeltelijk)

$\pi_0 = 0{,}02$) en de alternatieve hypothese $H_1 : \pi \neq 0{,}02$.

In de steekproef zaten 32 katten die FIV-positief waren. Dit leidt tot een Z-waarde van 3,15.
Er wordt gesteld dat bij een positieve Z-waarde de eenzijdige p-waarde gelijk is aan $P(Z \geq$ 'die uitkomst'); en bij een negatieve Z-waarde is dat $P(Z \leq$ 'die uitkomst'). Daarna wordt de tweezijdige p-waarde berekend door de eenzijdige p-waarde met 2 te vermenigvuldigen. Als de eenzijdige of tweezijdige p-waarde klein is, ofwel kleiner dan een van te voren gesteld getal α, dan is er alle reden om de nulhypothese niet te geloven. Het getal α noemt men de onbetrouwbaarheid. In dit geval is de tweezijdige p-waarde gelijk aan $2 \cdot P(Z \geq 3{,}15) = 0{,}0016$. Bij $\alpha = 0{,}05$ wordt H_0 verworpen. De fractie katten met kattenaids is groter dan 0,02.

In het volgende hoofdstuk worden op eenzelfde manier twee populatiefracties vergeleken waarbij als nulhypothese aangenomen wordt dat er geen verschil is tussen beide populatiefracties, $\pi_1 = \pi_2$, dus $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$.
De formules lijken ingewikkelder:

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{P_1 \cdot (1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2 \cdot (1-P_2)}{n_2}}}$$

Maar ze zijn goed te begrijpen door te bedenken dat je nu niet naar P kijkt maar naar $P_1 - P_2$.
De standaardafwijking van het verschil wordt nu berekend met $\sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}$; op de gebruikelijke 'manier van de stelling van Pythagoras'. Omdat de echte populatiefracties niet bekend zijn, worden de steekproeffracties gebruikt.

De laatste toets gaat over het verschil in leeftijd tussen gevonden en gebrachte asielkatten. Leeftijd is een continue variabele. De nulhypothese is $\mu_1 - \mu_2 = 0$, als waren de gemiddelde leeftijden van de gevonden en de gebrachte katten gelijk.
De standaardafwijking van het steekproefgemiddelde wordt weer met de $\sqrt{n}$-wet en 'Pythagoras' berekend
($\sigma = \frac{\textit{steekproef standaardafwijking}}{\sqrt{n}}$).
De Z-waarde kan nu berekend worden met de standaardfouten van de steekproefgemiddelden.

Er blijkt een Z-waarde van 5,86 uit te komen, een overduidelijk significant verschil. Er wordt nog opgemerkt dat het vergelijken op FIV van de gevonden en de gebrachte katten niet helemaal eerlijk is omdat de leeftijden nogal verschillen. Als je rekening wilt houden met meerdere gerelateerde kenmerken, dan moet je de methode van *logistische regressie* toepassen. Dit past niet binnen het bestek van dit boekje.

Hoe is het voor de leerlingen?

Op zich is het boekje zeer goed te doen binnen de gestelde tijd van 12 tot 15 uur en dan 4 tot 6 uur voor de eindopdracht en de presentatie. Leerlingen vinden het een prettig leesbaar boekje. Zeker met de antwoorden erbij kunnen ze het boekje goed doorwerken.
Omdat de behandeling via standaardiseren gaat en niet zoals ze het in hun wiskundelessen gehad hebben, zit er voldoende uitdaging in. Ik vraag (wiskunde-A) leerlingen ook te kijken naar hoe ze het zelf geleerd hebben. Hebben ze herkend waar de $\sqrt{n}$-wet is gebruikt? Waar zit de overschrijdingskans in het verhaal. Waarom is de tabel alleen voor Z-waarden ≥ 0 opgenomen? Waarom moet je de eenzijdige p-waarde keer 2 doen? Hoe zou je het met de grafische rekenmachine eenvoudiger kunnen uitrekenen? Maar ze komen er nauwelijks toe om oplossingen via de grafische rekenmachine te vergelijken met die van het boekje. Bij de begeleiding van leerlingen zou je kunnen aangeven dat je sneller de kansen kan berekenen met de GR dan met de tabel achterin het boekje.

Tot slot

In het boekje wordt stap voor stap gezegd wat je moet doen. Er wordt niet uitgelegd of verteld met welke redenen de opeenvolgende stappen genomen moeten worden. Doe maar mee en je komt tot een antwoord. Leerlingen die in de les al met hypotheses toetsen te maken hebben gehad, zullen beter snappen wat er gebeurt dan leerlingen die zonder voorkennis dit boekje doornemen. Te overwegen valt om in een volgende druk ook aandacht te schenken aan het waarom en hoe van het toetsen van hypotheses.

Ik vind dat er te weinig terugkoppeling in het boekje zit naar de gewone lesstof. Het zou mooi zijn als de woorden *standaardfouten* en *eenzijdige p-waarde* in verband gebracht zouden worden met de overschrijdingskans en de betrouwbaarheid. Omdat achterin het boekje van alle opdrachten de antwoorden volledig uitgewerkt zijn opgenomen, wordt het de leerlingen wel erg gemakkelijk gemaakt. De eindopdracht geeft daarentegen volop de gelegenheid aan de leerling om te laten zien wat hij van de behandelde stof heeft begrepen.

Sinds enkele jaren is het domein Statistiek en kansrekening verdwenen uit het curriculum van wiskunde-B. Voor sommige zebraboekjes levert dit voor de B-leerlingen een extra handicap op. Leerlingen met wiskunde-D hebben wel weer de kansrekening in hun lesstof. Veel N&G-leerlingen die geneeskunde willen gaan studeren of sociale wetenschappen, hebben wiskunde-B in hun profiel. Voor hen gaat statistiek een wezenlijk onderdeel vormen van hun studie; zij zijn wel geïnteresseerd in het onderwerp kattenaids.
Ik heb goede ervaringen met B-leerlingen die toch een boekje zoals *Kattenaids* hebben doorgewerkt. Ze moeten wel wat meer moeite doen om de kansrekening en statistiek die nodig is, eerst zelf onder de knie te krijgen. Met wat aanwijzingen en een beetje hulp is het voor hen goed te doen.
Ze blijven qua terminologie wel helemaal in die van het boekje zitten. De woorden standaardfouten en p-waarde brengen zij niet in verband met steekproefgemiddelde en overschrijdingskans.

Over de auteur
Rob van Oord gebruikt elk jaar vele boekjes in zijn klassen. Hij is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege in Waddinxveen.
Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem een e-mailbericht zenden.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

De kans dat Nederland kampioen wordt

[Jeroen Spandaw]

Hoe groot is volgens u de kans dat Nederland deze zomer Europees kampioen voetbal wordt? Er hebben zich 16 landen geplaatst en Nederland is niet het slechtst, maar heeft wel een zware poule geloot. Ik houd het op 15%. Duitsland is wat mij betreft favoriet met 50% en Spanje geef ik 40% kans op de winst. Hola, nu zit ik boven de 100%. Is dat een probleem? U heeft vast een ander rijtje bij de 16 deelnemers. Is het totaal bij u wel 100%?

Wat betekenen deze getallen eigenlijk? Wat betekent het begrip 'kans' bij een eenmalige gebeurtenis? Een worp met een dobbelsteen kunnen we eindeloos herhalen en dan kunnen we kijken naar frequenties. Maar bij eenmalige gebeurtenissen zoals het EK voetbal 2012 geldt dat niet. Kun je dan wel spreken over kansen? Is er überhaupt sprake van toeval? Of gaat het meer over onwetendheid? En is het begrip 'kans' dan wel van toepassing?

Veel wiskundigen kiezen bij de beantwoording van deze vragen voor de veiligste variant. De werkelijkheid (hier het voetbaltoernooi om de Europese titel 2012) wordt gesimuleerd door een kansexperiment, bijvoorbeeld door het trekken van ballen uit vazen. Dat fysieke experiment kun je weer wiskundig modelleren. Alleen binnen dat wiskundige kansmodel kun je met recht over kansen spreken. Het begrip 'kans' is een puur wiskundig begrip met een precieze betekenis, maar alleen binnen een gegeven wiskundig kansmodel. Zo is de kans dat de waarde van een standaard-normaal-verdeelde toevalsvariabele tussen 5 en 6 ligt gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_5^6 \exp(-\frac{1}{2}z^2)\,dz$. Als een wiskundige in functie over 'kans' spreekt, dient hij zich te beperken tot dit soort puur wiskundige uitspraken die precies gedefinieerd en bewezen kunnen worden. De vraag in hoeverre het wiskundig model iets met de werkelijkheid te maken heeft, is een niet-wiskundige kwestie. Bij een echte dobbelsteen is er waarschijnlijk (pardon!) geen sprake van zes uitkomsten met kans $\frac{1}{6}$ en bovendien is het voorstelbaar dat opeenvolgende worpen niet geheel onafhankelijk van elkaar zijn. Maar *als* de dobbelsteen mathematisch zuiver is en *als* de worpen onafhankelijk zijn, dan is bijvoorbeeld de stelling van de grote aantallen van toepassing en zullen dus de relatieve frequenties naar $\frac{1}{6}$ convergeren. Vanwege deze empirische rechtvaardiging van het wiskundig kansbegrip worden dergelijke opvattingen over het begrip 'kans' meestal *frequentistisch* genoemd.

In de vorige alinea schreef ik 'wiskundige in functie' omdat we in het dagelijks leven het begrip 'kans' ook op een andere manier gebruiken. De kans van 15% uit de inleiding geeft mijn geloof in winst van Nederland weer. In tegenstelling tot de frequentistische opvatting is dit begrip 'kans' ook van toepassing op eenmalige gebeurtenissen. Omdat verschillende personen verschillende kansen toekennen, spreekt men in dit verband vaak van *subjectieve kansen*. Aanhangers van deze opvatting worden vaak *Bayesianen* genoemd vanwege de centrale rol van de stelling van Bayes (naar Thomas Bayes;1702-1761). Ik kom hier aan het eind van dit artikel op terug.

Zoals zoveel wiskundigen ben ik frequentistisch opgevoed en sta ik argwanend tegenover subjectieve kansen die iets vaags als een mate van geloof weergeven. (Aan de andere kant: ook een frequentist moet subjectieve keuzes maken bij de keuze van een model.) Toch wil ik in dit artikel uw aandacht vragen voor de subjectieve interpretatie. Een wiskundige kan die misschien negeren, maar een wiskundeleraar kan zich die luxe niet permitteren, omdat leerlingen in het dagelijks leven voortdurend het subjectieve kansbegrip tegenkomen. In dit artikel zet ik (net als in [1]) voor de eenvoud een zwart-wit beeld neer van Bayesianen met subjectieve kansen tegenover frequentisten die dergelijke subjectiviteit verfoeien. Voor meer nuances en achtergronden verwijs ik naar [2].

Ik kreeg meer waardering voor subjectieve kansen toen ik las over de ideeën van Bruno de Finetti (1906-1985). De Finetti gebruikte weddenschappen tussen twee personen – ik noem hen Agnes en Bert – om het begrip 'subjectieve kans' te preciseren. We starten met een gebeurtenis, zoals het gooien van een zes met een dobbelsteen of het winnen van de Europese voetbaltitel 2012 door Nederland. (De eerste gebeurtenis is herhaalbaar, de tweede niet. Bovendien lijken opinies over voetballen veel subjectiever dan opinies over dobbelstenen.) Bij iedere gebeurtenis hoort een 'contract' waarin staat dat de bezitter van het contract 100 euro krijgt van de andere speler als de gebeurtenis optreedt. Agnes moet nu bepalen hoeveel euro dit contract volgens haar waard is. Vervolgens mag Bert bepalen of Agnes het contract voor dit bedrag *aan* hem moet *verkopen* of juist *van* hem moet *kopen*. Daarna wordt het experiment uitgevoerd (een dobbelsteen gegooid, een voetbaltoernooi afgewerkt) om te bepalen of de gebeurtenis uitkomt. Zo ja, dan krijgt de eigenaar van het contract 100 euro van de andere speler; zo nee, dan gebeurt er verder niets. We vatten het bovenstaande nog eens samen in een stappenplan:

1. Agnes bepaalt de prijs van het contract.
2. Bert bepaalt daarna wie aan wie het contract verkoopt.
3. Het experiment wordt uitgevoerd.
4. De rekening wordt opgemaakt.

Hier is een voorbeeld. Agnes bepaalt de prijs van het contract bij het gooien van een zes met een dobbelsteen op 10 euro. Bert vindt die prijs nogal laag en besluit het contract voor dat bedrag van Agnes te kopen. Hij geeft haar 10 euro en ontvangt

het papiertje. Vervolgens wordt de dobbelsteen gegooid. Bij een zes ontvangt Bert 100 euro van Agnes en heeft hij netto 90 euro gewonnen; bij een andere uitkomst is Bert's contract niets meer waard en heeft hij dus 10 euro verlies geleden.

Nadat Agnes en Bert het bovenstaande spel vele malen gespeeld hebben, ziet Agnes in dat zij weliswaar vaker 10 euro wint dan dat zij 90 euro verliest, maar dat ze op den duur toch verlies lijdt. Ze verhoogt daarom de prijs van het contract naar 20 euro. Bert vindt die prijs te hoog en besluit de rollen om te draaien: hij bepaalt dat nu Agnes het contract van hem moet kopen voor 20 euro. Hij ontvangt dus 20 euro van Agnes en Agnes ontvangt het contract. Als er nu een zes wordt gegooid, dan moet Bert 100 euro aan Agnes geven en heeft hij netto 80 euro verlies. Bij een ander aantal ogen heeft Bert juist 20 euro gewonnen. Bij een zuivere dobbelsteen zal Bert in 5 van de 6 keer 20 euro winnen en in 1 op de 6 keer 80 euro verliezen. Op den duur zal Bert dus weer geld verdienen aan Agnes, net als in het eerste geval. Agnes zal haar prijs dus naar beneden moeten bijstellen.

Het contract geldt slechts voor één worp, maar het gehele spel – Agnes bepaalt de prijs, Bert bepaalt wie aan wie verkoopt, het experiment wordt uitgevoerd en bij succes ontvangt de bezitter van het contract 100 euro van de andere speler – kan herhaald worden.
We nemen nu aan dat Agnes een rationeel persoon is die liever geen geld verliest. Ze zal dus haar subjectieve kans p bepalen en vervolgens de prijs van het contract vastleggen op $100p$ euro. De Finetti keert dit om: als Agnes de prijs op P euro vaststelt, dan zeggen we dat $p = \frac{P}{100}$ haar subjectieve kans is. Een rationele Bert koopt het contract van Agnes als hij vindt dat zij de kans heeft onderschat. Als hij echter meent dat Agnes de kans heeft overschat, dan zal hij het contract aan haar verkopen. Omdat Bert mag kiezen wie van wie mag kopen, is Agnes gedwongen om haar subjectieve kans zo nauwkeurig mogelijk te bepalen. Op deze manier legt De Finetti de subjectieve kansen van Agnes vast. Dit werkt niet alleen bij herhaalbare experimenten, zoals het gooien met dobbelstenen, maar ook bij eenmalige gebeurtenissen, zoals het EK voetbal 2012. In het tweede voorbeeld is bovendien de inschatting van de kans volkomen subjectief.

Hoewel verschillende Agnessen verschillende subjectieve kansen kunnen kiezen, blijkt dat rationele Agnessen zich aan de wetten van de kansrekening moeten houden. Hiermee bedoel ik de drie axioma's van Kolmogorov (1903-1987), die de basis van de gehele mathematische kansrekening vormen.
Volgens het eerste axioma liggen kansen altijd tussen 0 en 1. Een rationele Agnes kan dus geen negatieve prijs P of een prijs $P > 100$ euro vaststellen. Bij een negatieve prijs P koopt Bert altijd: hij krijgt dan sowieso $|P| > 0$ en misschien ook nog eens 100 euro. Kortom, hij wint altijd. Als Agnes daarentegen een prijs $P > 100$ euro kiest, dan zal Bert het contract verkopen. Hij weet dan zeker dat hij minstens $(P - 100)$ euro winst zal hebben. Een rationele Agnes zal dus altijd een subjectieve kans p in $[0, 1]$ kiezen. Op een vergelijkbare manier beredeneer je dat een rationele Agnes zich aan het tweede axioma van Kolmogorov moet houden: de kans op een *zekere* gebeurtenis is 1.

Het derde en laatste axioma is de somregel: als $A, B, C, \ldots$ disjuncte gebeurtenissen zijn, dan geldt
$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$
Voor het gemak kijken we alleen naar de somregel voor twee gebeurtenissen, bijvoorbeeld:
G_1: Nederland wordt Europees kampioen 2012;
G_2: Duitsland wordt Europees kampioen 2012.
De vereniging van deze twee gebeurtenissen is:
G_3: Nederland of Duitsland wordt Europees kampioen 2012.
Agnes en Bert hebben nu 3 contracten: een contract per gebeurtenis. Agnes stelt de prijzen P_1, P_2 en P_3 vast en Bert mag vervolgens *per contract* bepalen of hij koopt of verkoopt. (Hij kan bijvoorbeeld contract 1 verkopen en contracten 2 en 3 verkopen.)
We laten zien dat een rationele Agnes zich moet houden aan $P_1 + P_2 = P_3$.
Stel dat Agnes dat niet doet en bijvoorbeeld $P_1 = 10$ euro, $P_2 = 25$ euro en $P_3 = 60$ euro als prijzen vaststelt. Haar subjectieve kansen zijn dus $p_1 = 0{,}10$ en $p_2 = 0{,}25$ en $p_3 = 0{,}60$. Als u Bert was, welke contracten zou u dan kopen dan wel verkopen? Als u het handig aanpakt, wint u altijd. Natuurlijk laat onze rationele Agnes dat niet gebeuren, dus zij houdt zich netjes aan het derde axioma van Kolmogorov: $p_1 + p_2 = p_3$.
De inleiding, waarin de som van de subjectieve kansen de 100% overschreed, is dus geschreven door een verwarde geest…

In ons kansrekenonderwijs moeten we naar mijn mening ook aandacht besteden aan de interpretatie van het begrip kans. Het moet mogelijk zijn om het contract-idee van De Finetti om te zetten in een pakkende werkvorm en zo de subjectieve interpretatie van kansen een plek te geven in het voortgezet onderwijs.
Ik houd me van harte aanbevolen voor uw ideeën.

De subjectieve interpretatie van kans als mate van geloof wordt vaak *Bayesiaans* genoemd vanwege de centrale rol van de *regel van Bayes* in deze aanpak. Een variant van deze regel zegt dat:
$$\frac{P(A \mid B)}{P(A^c \mid B)} = \frac{P(B \mid A)}{P(B \mid A^c)} \cdot \frac{P(A)}{P(A^c)}$$, mits $P(A^c \,\&\, B) > 0$ en $P(A) > 0$

Hierbij is A^c de complementaire gebeurtenis ‘niet-A’. Vriend en vijand (Bayesiaan en anti-Bayesiaan) zijn het erover eens dat de regel van Bayes een trivialiteit is: ze volgt onmiddellijk uit de definitie van de voorwaardelijke kans. (Links en rechts staat $\frac{P(B\,\&\,A)}{P(B\,\&\,A^c)}$.) Toepassen van de regel van Bayes maakt iemand dus nog geen Bayesiaan! Je bent pas Bayesiaan als je de regel ook toepast op je subjectieve kansen.

Als voorbeeld bekijken we weer de gebeurtenis A dat Nederland Europees kampioen voetbal 2012 wordt.
Ik start met mijn subjectieve kans $P(A) = 0{,}15$; dus $\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{0{,}15}{0{,}85}$. Stel nu dat ik nieuwe informatie B krijg, bijvoorbeeld dat alle Nederlandse voetballers na het toernooi geridderd worden. (Maar verder is al het sportnieuws van 2012 volslagen langs mij heen gegaan.) De kans op B gegeven A is natuurlijk veel groter dan de kans op B gegeven niet-A. De zogeheten *Bayes-factor* of *aannemelijkheidsverhouding* $\frac{P(B|A)}{P(B|A^c)}$ is dus veel groter dan 1. In dit voorbeeld is deze factor al net zo subjectief als de startkans $P(A)$. Als we voor die factor 100 nemen, dan vinden we:

$$\frac{P(A|B)}{P(A^c|B)} = 100 \cdot \frac{0{,}15}{0{,}85}$$

en dus $P(A \mid B) \approx 0{,}95$. Mijn voorzichtige schatting $P(A) = 0{,}15$ voor het toernooi wordt dus door het ridderen van de spelers flink naar boven bijgesteld!

In het bovenstaande voorbeeld zal een frequentist grote problemen hebben met de subjectiviteit van zowel de *prior odds* $\frac{P(A)}{P(A^c)}$ als van de Bayes-factor $\frac{P(B|A)}{P(B|A^c)}$.
Ik eindig met een voorbeeld waarin de Bayes-factor wel acceptabel is voor een frequentist. (De prior $P(A)$ blijft echter discutabel.) We gooien n keer met een munt met kopkans p. We nemen aan dat de worpen onafhankelijk zijn en schrijven X voor het aantal keren kop. We toetsen een nulhypothese $H_0: p = \frac{1}{2}$ tegen de alternatieve hypothese $H_1: p = 1$. Stel dat we $n = 10$ keer gooien en $X = 10$ keer kop vonden. We schrijven B voor deze informatie en A voor de ‘gebeurtenis’ dat de nulhypothese waar is. Frequentist en Bayesiaan zijn het nu eens over de Bayes-factor:

$$\frac{P(B|A)}{P(B|A^c)} = \frac{P(B|H_0)}{P(B|H_1)} = \frac{(\frac{1}{2})^{10}}{1} = \frac{1}{1024}$$

De Bayesiaan zou verder kunnen geloven dat *a priori* beide hypothesen even waarschijnlijk zijn. Gegeven de experimentele data $X = 10$ en het model vindt hij dan een kans van $P(H_0 \mid B) = \frac{1}{1024}$ voor de nulhypothese.
Een frequentist zal daarentegen nooit spreken over de kans op de nulhypothese. Een hypothese is waar of niet, met kansen heeft dat niets te maken. Hij is hoogstens bereid te beweren dat de kans op de nulhypothese 0 of 1 is: 1 als de nulhypothese waar is en 0 als dit niet het geval is. Helaas weet hij niet of de kans 0 of 1 is, en die onzekerheid wil hij, anders dan een Bayesiaan, niet kwantificeren door middel van een subjectieve kans. Als je bij het toetsen van hypothesen dus een p-waarde $P(B \mid H_0) = \frac{1}{1024}$ vindt, is dit dus *niet* de kans dat de nulhypothese waar is, hoewel menig leerling het wel zal denken! Sterker nog, zelfs rechters, getuige-deskundigen en auteurs van boeken over statistiek voor juristen maken deze fout (zie [2]; p. 228 en p. 290)!

Ik heb me als leraar bij het toetsen van hypothesen nooit prettig gevoeld, hoewel ik mijn leerlingen het kunstje best kon bijbrengen. Allereerst die nulhypothese: natuurlijk geloof ik zelden of nooit dat p *exact* gelijk is aan ½! Vervolgens berekenen we de voorwaardelijke kans op de data (of erger) *gegeven* de nulhypothese, omdat we die kans nu eenmaal kunnen uitrekenen. Maar willen we niet precies het omgekeerde weten? De *data* zijn immers gegeven, niet de nulhypothese! Frequentisten gaan het probleem uit de weg door $P(B \mid H_0)$ de *aannemelijkheid* van de nulhypothese gegeven de data te noemen. Door het gebruik van een ander woord vermijden ze de *prosecutor’s fallacy*, het verwisselen van voorwaardelijke kansen $P(A \mid B)$ en $P(B \mid A)$. Bayesianen zijn veel minder terughoudend met hun kansbegrip en spreken frank en vrij over de kans dat een hypothese waar is of de kans dat Nederland kampioen wordt. Enerzijds bewonder ik hun moed, anderzijds huiver ik bij alle subjectiviteit.

Hoe dapper bent u eigenlijk? Durft u een subjectieve kans te noemen? Wat is bijvoorbeeld *nu* – weken vóór het Europees kampioenschap – volgens u de kans dat Nederland kampioen wordt? Is dat iets *tussen* 0 en 1? Of is die kans *nu* al gelijk aan 0 of 1, ook al kunnen we pas na het toernooi vaststellen welk van de twee?

Dank
Ik bedank Agnes Verweij en Geurt Jongbloed voor hun constructieve opmerkingen.

Noten

[1] S. Bertsch McGrayne (2011): *The theory that would not die*. New Haven, CT (USA): Yale University Press.
[2] Ian Hacking (2009): *An Introduction to Probability and Inductive Logic*. Canbridge (UK): Cambridge University Press.

Over de auteur
Jeroen Spandaw is universitair docent wiskunde en lerarenopleider aan de TU Delft.
E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*

Veel enthousiasme op tweede Wiskunde-C dag!

[Hielke Peereboom]

Het is 14 maart 2012 en rond de klok van 10 uur begint het in de foyer van de Hogeschool Domstad al gezellig druk te worden. Wiskundedocenten halen bij de balie hun deelnemersbadge voor de Wiskunde-C dag en schrijven zich in voor de workshops van hun keuze waarna onder het genot van verse koffie en het bijpraten met collega's de plenaire aftrap van de dag afgewacht wordt.
Om 10:30 uur is het zover: Peter van Wijk, projectleider van het cTWO-projectteam, opent de dag met het verwelkomen van het uit ongeveer 125 verwachtingsvolle personen bestaande publiek. Bij zijn openingswoorden vermeldt hij dat het ook om een andere reden een bijzondere dag is: het is pi-dag! Gezien de opkomst is het duidelijk dat wiskunde-C leeft en opnieuw actueel is vanwege het besluit van de minister om wiskunde-C ook op het havo in te voeren.

Daarna is het woord aan wiskundemeisje Ionica Smeets (***zie foto 2*** op pag. 240) die een ontzettend enthousiast verhaal houdt met als titel: 'Wiskunde in 1001 verhalen'. Ze laat zien dat wiskunde overal aanwezig is en dat er heel vaak een (leuk) verhaal bij te vertellen valt. Uiteraard wordt ingezoomd op situaties die bij wiskunde-C van toepassing zouden kunnen zijn. Na haar prachtige, met veel humor vertelde verhalen, start de eerste workshopronde.

De eerste ronde workshops

Henk Reuling (pilotdocent wiskunde-C aan het Liemers College in Zevenaar) vertelt over de lesmodule 'Geschiedenis van getallen', die hij op verzoek van cTWO aan het ontwikkelen is. Monique Pijls (Stichting Bèta-boost) laat zien hoe wiskunde kan gaan leven met *Animath*, een methode waarbij filmpjes een sterke ondersteunende rol vervullen. Leerlingen worden door het maken van kennisclips artistiek en vakinhoudelijk uitgedaagd en hierbij kan een boeiende en nuttige samenwerking ontstaan tussen wiskundedocenten en docenten beeldende vorming.
Piet Versnel (pilotdocent wiskunde-C aan het Da Vinci College in Purmerend) gaat in zijn workshop in op het domein 'Algebra en tellen' binnen het nieuwe wiskunde-C examenprogramma en met name waar de grote verschillen zitten met wiskunde-A en het huidige wiskunde-C, zowel inhoudelijk als wat aanpak betreft. Ook kijkt hij met de toehoorders naar de verschillen op het terrein van de algebraïsche vaardigheden.
Steven Wepster en Jasper van der Schors hebben een bijzonder aardig verhaal over Simon Stevin en Museum Boerhaave. Dit museum ontwikkelt momenteel een educatieve wiskunderoute door het museum, die aantrekkelijk is voor leerlingen op verschillende niveaus. Als voorproefje van deze route presenteren ze alvast een aantal objecten die daarin een rol spelen, zoals de Jacobsstaf, stokjes van Napier (***zie foto 1***), en de tekenaap. Ze laten zien hoe ze vroeger gebruikt zijn en wat je er nu mee kunt in de klas. Zowel de objecten als de wiskunde komen hierdoor tot leven. En natuurlijk hopen ze docenten warm te maken voor een bezoek met de klas aan het museum!

De tweede ronde workshops

Gerard Koolstra vertelt over zijn lesmodule 'Leesbaarheid'. Lesmateriaal over (het rekenen met) allerlei formules vanuit de realistische context over de leesbaarheid van teksten en of en hoe deze gevangen kan worden met formules.
Kunstenares Carla Feijen, geflankeerd door Michel de Bakker (educatief medewerker van RAP architectuurcentrum in Leiden), laat haar gehoor weten dat ze op de middelbare school niets met wiskunde had. In haar beroep als kunstenaar en getroffen door de geometrie in de natuur ging ze op zoek naar de wiskunde achter allerlei geometrische vormen. Dit zou, volgens de workshopleiders, heel goed het uitgangspunt kunnen zijn bij wiskundelessen: eerst de toepassing zien, vragen hierbij stellen en dan de wiskunde inzetten om de vragen te beantwoorden. Ze zetten vervolgens de deelnemers hard aan het werk om in groepswerk een geometrisch kunstwerk te produceren (***zie foto 3***).
Namens het Cito gaat Ger Limpens in op het centraal examen wiskunde-C. Aan de hand van het voorbeeldexamen zoals dat in de voorlopige syllabus staat, belicht hij hoe de diverse domeinen aan de orde (kunnen) komen. Een uiterst informatieve workshop die veel belangstelling trekt.
Dat geldt ook voor de workshop 'Wiskunde-C ook op havo?!', waarin Peter van Wijk (cTWO) de actuele situatie schetst en de aanwezigen uitdaagt zich uit te spreken over deze ontwikkelingen en over de mogelijke inhoud van dit nieuw te ontwikkelen vak.
Zoals te verwachten levert dit een uiterst levendige discussie op. Wat betreft de vakinhoud worden talloze en erg uiteenlopende suggesties gedaan.

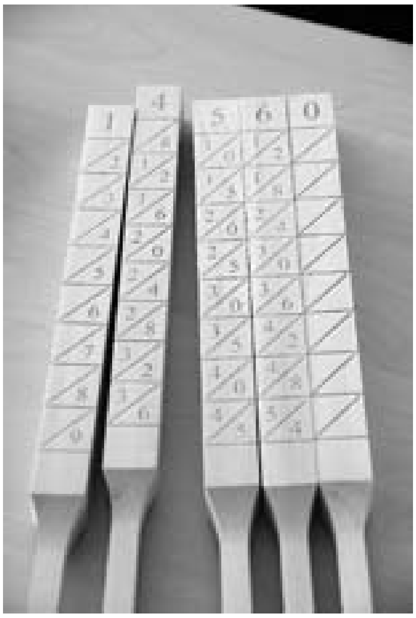


foto 1



foto 2



foto 3



foto 4

Toekomstige leerlingen hoeven zich geen zorgen te maken over al de onderwerpen in de lijst – dit zal bij lange na niet gerealiseerd worden! Een programmacommissie is net gestart met haar activiteiten en voorlopig is het nog even afwachten. Een ander punt dat erg leeft is de schoolorganisatorische kant die de invoering van wiskunde-C (zowel vwo als havo) met zich mee brengt.

Persoonlijke noot van de auteur

In de discussies, ook in de *WiskundE-brief*, valt mij onder andere op dat ten aanzien van het toekomstige wiskunde-C vaak wordt geredeneerd vanuit de huidige situatie. Op het vwo is dat vooral het huidige wiskunde-C examenprogramma als aftreksel van het wiskunde-A examenprogramma in combinatie met de beperkte doorstroomrechten van wiskunde-C. Dit zorgt mijns inziens ervoor dat op de meeste scholen het aantal leerlingen erg klein is, en dus voor allerlei problemen (onbetaalbare kleine groepen, en daardoor het onderbrengen van leerlingen bij wiskunde-A, met de nadelige gevolgen van dien). In de discussies gaat men er vanuit dat dit bij de invoering van de nieuwe programma's in 2015 op dezelfde manier speelt. Dit is niet het geval omdat enerzijds het nieuwe wiskundeprogramma zich niet meer laat vergelijken en combineren met wiskunde-A, met uitzondering van het vernieuwde domein 'Statistiek en kansrekening'. Anderzijds is het streven van cTWO om de doorstroomrechten van wiskunde-C danig uit te breiden. Dit zal er (hopelijk) voor zorgen dat de aantallen leerlingen bij wiskunde-C significant gaan toenemen.
Op het havo, zo wordt herhaaldelijk gesteld, zijn er op dit moment zo weinig leerlingen die geen wiskunde-C kiezen dat het niet nodig is om wiskunde verplicht te stellen en omdat ook hier weer heel kleine groepen zijn te verwachten.
Het is inderdaad zo dat veel leerlingen uit het C&M-profiel toch wiskunde kiezen, veelal wiskunde-A. Maar dat heeft een reden: doorstroming naar vervolgopleidingen (zoals pabo en hbo(v)) open houden. Als ervoor gezorgd wordt dat het nieuwe wiskunde-C ook deze doorstroomrechten krijgt, zal – zo is mijn verwachting – een groot deel van de C&M-leerlingen die nu wiskunde A kiezen, dan de keuze maken voor wiskunde-C. Temeer omdat ik er vanuit ga dat dit vak een minder formeel-wiskundig karakter zal krijgen (in navolging van wiskunde-C op vwo) dan wiskunde-A, en daardoor toegankelijker, juist voor deze leerlingen-groep. Al met al, de pessimistische verwachtingen ten aanzien van de aantallen leerlingen bij wiskunde-C ingaande 2015, deel ik niet.

Tot slot

Terug naar de Wiskunde-C dag – de dag wordt plenair afgesloten met een boeiende lezing van Tom Verhoeff over de wiskunst van zijn vader Koos Verhoeff. Naast een demonstratie van een aantal weergaloze objecten (***zie foto 4***) laat Tom ook zien dat sommige objecten zich uitstekend lenen voor beschouwingen binnen het domein 'Vorm en ruimte' (symmetrieën, aanzichten, verhoudingen) maar eveneens binnen het subdomein 'Tellen' (combinatoriek).
Daarna een hapje en drankje en dan is de dag al weer ten einde, op naar de volgende, in maart 2013. Want zo bleek uit een gehouden peiling: daarvoor is veel belang-stelling!

Over de auteur

Hielke Peereboom is wiskundedocent aan het Bornego College in Heerenveen (pilotschool wiskunde-C) en lid van het cTWO-projectteam.
E-mailadres: *h.peereboom@uu.nl*

Vanuit de oude doos

A° 19 $\frac{28}{29}$

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een pittige analytische opgave uit 1928 en een mooie, verrassende goniotoepassing uit 1929.
Natuurlijk vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Mogelijk vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking van de opgaven aan.

Opgave 1 (1928)

In driehoek ABC zijn AD en BE hoogtelijnen, CF is bissectrix. AD snijdt CF in K, BE snijdt CF in G. Indien $FG = ½FK$ en $\angle C$ = bg tg 2 vraagt men de hoeken van driehoek ABC te berekenen.

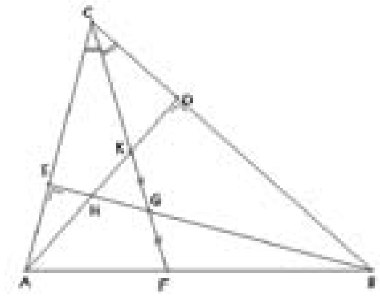
Opmerking. De functienaam 'bg tg' is nu niet meer gebruikelijk. We schrijven liever $\angle C = \text{bgtan}(2)$ of $\angle C = \arctan(2)$: hoek C is gelijk aan de hoek waarvan de tangens gelijk is aan 2.

Opgave 2 (1929)

Gegeven een hoek $A = 50°$. Op het ene been neemt men een stuk $AB = c$; op het andere punt C zodanig te bepalen, dat de loodlijn in C op BC opgericht, BA (eventueel verlengd) snijdt in een punt D zodanig, dat BD zo klein mogelijk is.
Bereken de hoeken CBA en ACB.

Uitwerkingen

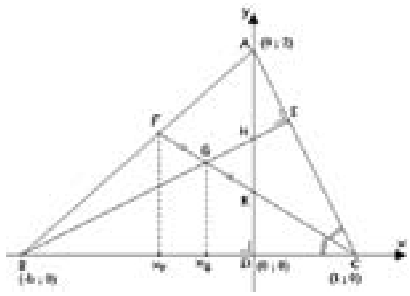
Opgave 1 – Een werkschets:



figuur 1

Daarin zijn de gegevens AD loodrecht op BC, BE loodrecht op AC, $\tan(C) = 2$ en $FG = GK$ zo goed mogelijk weergegeven. H is het hoogtepunt van de driehoek.
We weten dus al de grootte van hoek C, namelijk:
$\angle C = \text{bgtan}(2) \approx 63{,}43494882° \approx 63°26'6''$

De loodrechte standen sturen me een orthogonaal assenstelsel te kiezen. Het idee is dan daarin de coördinaten van de punten G en F te berekenen.
Ik kies bijvoorbeeld BC als horizontale en DA als verticale as en stel $CD = 1$.



figuur 2

Gegeven is $\tan(C) = 2$; dus $DA = 2$. En vervolgens stellen we vergelijkingen op:
AC: $y = -2x + 2$
BC: $y = 0$

Intermezzo – Er is een handige formule voor de vergelijkingen van de bissectrices van de hoeken tussen twee snijdende lijnen, die ik me herinner uit mijn middelbare schooltijd (1968). Ik koester die kennis nog steeds! Deze formule duikt ook op bij vwo wiskunde-D.
Gegeven zijn de lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$. Dan zijn de bissectrices:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|px+qy+r|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

◊

Dit levert bij de lijnen AC en BC op:

$$\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

waaruit de vergelijkingen van de twee bissectrices volgen. De juiste keuze geeft voor CF:

$$y = \frac{2}{-\sqrt{5}-1}(x-1)$$

Eventueel na wortelherleiding:

$$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(x-1) .$$

Stel $DB = b$, dan heeft AB als vergelijking $y = \frac{2}{b}x + 2$. Die van BE is dan: $y = \frac{1}{2}(x+b)$.
Bedenk hierbij dat BE loodrecht staat op AC, zodat $(\text{rico}_{AC}) \cdot (\text{rico}_{BE}) = -1$.
Wanneer we met bovenstaande vergelijkingen de x-coördinaat van F en G uitrekenen, vinden we:

$$x_F = \frac{(\sqrt{5}-5)\cdot b}{(\sqrt{5}-1)\cdot b+4} \quad \text{en} \quad x_G = \frac{\sqrt{5}-1-b}{\sqrt{5}}$$

Gebruik nu het feit dat $x_F = 2 \cdot x_G$. Na 'kruislings' vermenigvuldigen en herschikken krijgen we de volgende vergelijking in b:
$(2 - 2\sqrt{5}) \cdot b^2 + (\sqrt{5} - 1) \cdot b + 8\sqrt{5} - 8 = 0$
Van die vergelijking zijn – hoe mooi – de coëfficiënten deelbaar door $(\sqrt{5} - 1)$, zodat je overhoudt:
$-2b^2 + b + 8 = 0$

De positieve wortel hiervan is: $b = \frac{1+\sqrt{65}}{4}$.
Dus:
$$\tan(B) = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{\frac{1+\sqrt{65}}{4}} = \frac{8}{1+\sqrt{65}}$$
Zodat: $\angle B \approx 41{,}43749183° \approx 41°26'15''$.
De hoekensom van de driehoek geeft:
$\angle A \approx 75°7'39''$.

Opgave 2 – Ik onderscheid twee gevallen. Eerst een werkschets waarbij *B* tussen *A* en *D* ligt.
Het is fraai deze tekening te maken met een dynamisch meetkundeprogramma, en dan *C* te schuiven, en vervolgens te zien hoe *D* beweegt: eerst steeds dichter bij *B*, en dan juist verder weg. Boeiend!



figuur 3

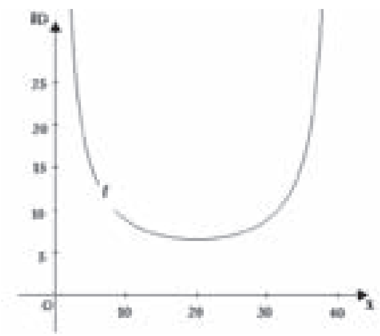
De *sinusregel* in driehoek *ABC*, met $\angle C = x$, geeft: $\frac{a}{\sin(50°)} = \frac{c}{\sin x}$; dus:

(1)… $a = \frac{c\cdot\sin(50°)}{\sin x}$

In de rechthoekige driehoek *BCD* geldt: $\cos(50° + x) = \frac{a}{BD}$, dus is:

(2)… $BD = \frac{a}{\cos(50°+x)}$

Substitutie van (1) in (2) geeft dan:
$$BD = \frac{\frac{c\cdot\sin(50°)}{\sin x}}{\cos(50°+x)} = \frac{c\cdot\sin(50°)}{\sin x\cdot\cos(50°+x)} = f(x)$$
De grafiek van *f* – functie van de grootte van hoek *C* (*x* wordt gemeten in graden) – geeft aan dat er inderdaad sprake is van een minimum; ***zie figuur 4***.



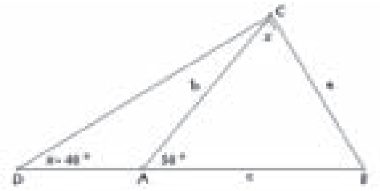
figuur 4

We gaan dit minimum bepalen met differentiëren (gebruik makend van de quotiënt- én de productregel), waarbij we opmerken dat in de teller van *f* een constante staat.

$$f'(x) = \frac{0 - c\cdot\sin(50°)\cdot(\cos x\cdot\cos(50°+x) + \sin x\cdot -\sin(50°+x))}{(\sin x\cdot\cos(50+x))^2} = \frac{-c\cdot\sin(50°)}{(\sin x\cdot\cos(50°+x))^2}\cdot\cos(50° + 2x)$$

$f'(x) = 0$ geeft $\cos(50° + 2x) = 0 = \cos(90°)$.
Dus: $x = 20°$, zodat:
$\angle ACB = x = 20°$ en $\angle CBA = 110°$

Het tweede geval: een werkschets waarbij *A* tussen *B* en *D* ligt.



figuur 5

De berekening gaat geheel analoog. In driehoek *DBC* geldt:

$\sin(x - 40°) = \frac{a}{BD}$

Waarna volgt dat hier:

$$BD = \frac{c\cdot\sin(50°)}{\sin x\cdot\sin(x-40°)} = g(x)$$

En deze functie heeft een minimum als $x = 110°$. Nu is:
$\angle ACB = 110°$ en $\angle CBA = 20°$
Het punt *D* ligt dan *tussen* de punten *A* en *B*.

Al met al, een prachtig dwarsverband tussen de sinusregel en differentiëren.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Verslag van de 10e wiskundeconferentie

[Joke Verbeek en Gert de Kleuver]

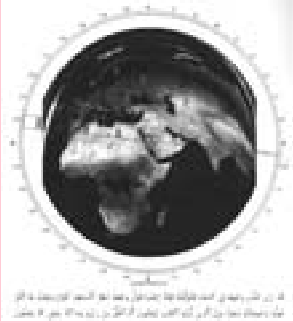
Maandag 30 januari 2012
Op weg naar de 10e wiskundeconferentie van het APS, die plaats vindt in Utrecht, is er meer dan genoeg tijd om na te denken over de zin of onzin van zo'n bijeenkomst. De winter heeft juist besloten die nacht een beginnetje te maken en de weg van mijn huis naar het APS-gebouw is daarom van begin tot eind vol met langzaam rijdend of zelfs stilstaand verkeer.
Voor uw verslaggever is het niet het tiende bezoek aan deze bijeenkomst voor docenten vmbo en onderbouw havo/vwo – voorheen Reehorstconferentie – maar het zal niet veel schelen. Zal er nog iets nieuws te ontdekken zijn voor een ouwe rot? Veel over rekenen natuurlijk, maar daar is de laatste tijd al wel erg veel over gesproken en gepubliceerd. Gelukkig zijn er ook telkens vernieuwingen, bijvoorbeeld op technologisch gebied, dus wie weet. Het programma omvat een kleine 30 workshops en presentaties, dus het moet mogelijk zijn iets te vinden dat boeit.

Rekenwonder
Ik val de goed gevulde zaal binnen als Lambrecht Spijkerboer, de organisator, de traditionele bos bloemen aanbiedt aan degene die zich het eerst voor de conferentie had aangemeld. Vanwege het lustrum is rekenwonder Willem Bouman uitgenodigd aanwezig te zijn. Die maakt uit de losse pols een aantal berekeningen met het getal 10. We geloven hem op zijn woord als hij de uitkomst van 10! opnoemt; niemand pakt zijn rekenmachine om het te controleren. Het rekenwonder blijft de hele dag beschikbaar om op verzoek zijn rekenkunst te laten testen.

Op weg naar Mekka
De plenaire openingslezing wordt verzorgd door professor J.P. Hogendijk. Het is niet verwonderlijk dat deze Utrechtse professor, die ook verbonden is aan een universiteit in Saoedi Arabië, veel weet van de Islam. Hij laat ons in zijn lezing 'Op weg naar Mekka' kennismaken met de wiskundige aspecten van de Islam, met name met het bepalen van de richting naar Mekka. Zoals de meesten van ons wel weten bidden gelovige moslims vijf keer per dag met het hoofd naar Mekka en dus zijn door de eeuwen heen manieren gezocht en gevonden om die richting te bepalen. Zeker bij het bouwen van een moskee was het zaak de richting goed te kiezen, want het mag natuurlijk niet gebeuren dat alle gelovigen tegelijk de verkeerde kant op bidden! Dat de inzichten en de berekeningswijzen in de loop der eeuwen gewijzigd zijn spreekt voor zich. Hogendijk heeft zich er helemaal in gestort en laat formules zien (niet te veel met sinus en cosinus, dat mocht niet van de organisatie…?), vertelt over geografische coördinaten, bolproblemen, grootcirkels, stand van de zon op de dag dat die loodrecht boven Mekka staat, tabellenboeken en passers. Doordat in een islamitische stad de straten rondom een moskee werden aangelegd, is het stratenplan van bijvoorbeeld Caïro direct beïnvloed door de richting naar Mekka. Dat die richting niet altijd hetzelfde is gebleven, vind je terug in de plattegrond. Een leuke wetenswaardigheid.
In de elfde eeuw is een instrument gemaakt voor het vinden van Mekka dat zó geavanceerd was dat pas in 1989 de wiskunde erachter is blootgelegd. Hogendijk heeft van dit instrument een nieuwe versie gemaakt waarvan alle aanwezigen er een krijgen uitgereikt; ***zie figuur 1***. Ook leuk om met de islamitische leerlingen te bekijken, en hen en passant te vertellen dat hun voorvaderen zeer veel wiskundige kennis bezaten. Natuurlijk verwachten wij van hen hetzelfde!
Eenvoudig instrument voor het bepalen van de richting naar Mekka. Je draait de lijn zo dat hij Mekka en je woonplaats verbindt en je leest dan aan de rand de bidrichting af. De afbeelding van de wereld is zodanig vervormd dat het instrument overal op de hele wereld te gebruiken is.

Spel(en) in de wiskundeles
De werkgroep met bovenstaande titel wordt geleid door Adri Knop en Anja Moeijes, docenten van SG Tabor in Hoorn. Zij wonnen eerder de Wiskunde Scholenprijs met hun wiskunde in spelvorm. Met aanstekelijk enthousiasme laten ze zien welke collectie spellen ze in de loop der jaren gemaakt hebben. Bij elk hoofdstuk valt wel iets te bedenken, een memoryspel, een sleepoefening, een woordzoeker of een domino, het is er allemaal; ***zie figuur 2***.
De tafels vol met het prachtig uitgevoerde aantrekkelijke spelmateriaal roepen de hebzucht op van de aanwezige collega's, maar zij zien op tegen al het (extra) werk dat het bedenken en maken van het materiaal kost. 'Klein beginnen', adviseert Anja, 'en in de loop der jaren krijg je vanzelf een grotere verzameling.' Ze geeft tips voor het opbergen. En wie niet zelf iets wil bedenken kan terecht op de site van de vereniging. Daar delen Adri en Anja gul veel van hun spellen met collega's uit het land. Terwijl de werkgroepleden alle spellen bekijken en proberen, geven Adri en Anja nog wat internetadressen waar je als wiskundedocent wat aan hebt.
Zo is *www.socrative.com* is een erg leuke site (nu nog gratis) waar je als docent een account kunt aanmaken waarop je klas kan inloggen. Kortom: veel uitdagende wiskunde voor leerlingen en docenten.

Protocol ERWD voor het vo op komst
ERWD staat voor Ernstige reken- en wiskundeproblemen en dyscalculie.
Komt met het rekenen ook de dyscalculie onze scholen binnen? Niet als het aan de commissie ligt die het protocol aan het opstellen is. De commissie heeft geleerd van de dyslexiehausse ('Op sommige scholen heeft 20% van de leerlingen een dyslexieverklaring.') en wil het voor leerlingen, en misschien nog wel meer voor hun ouders, niet aantrekkelijk maken een dyscalculieverklaring te krijgen. Het zal geen vrijgeleide voor tentamens en examens


figuur 1 Moderne versie van de Mekkawijzer


figuur 2 Wiskunde-triviant

worden. Sterker nog: het zal misschien wel bepaalde studierichtingen uitsluiten. Zoals iemand met een bril geen piloot kan worden, zo moet iemand met dyscalculie geen onderwijzer kunnen worden, is de stelling van commissielid Dolf Janson van het APS, die de presentatie verzorgt.
Dyscalculie bestaat wel, maar we gaan niet alle leerlingen die moeite hebben met rekenen, dat etiket geven.
Het signaleren van rekenproblemen moet vroegtijdig gebeuren, die leerlingen moeten adequaat worden begeleid, er moet een goede overdracht zijn van primair onderwijs naar voortgezet onderwijs en de rekenlessen in het vo moeten goed op aansluiten op die van het po. Dat zijn zo een aantal zaken die in het protocol aan de orde komen. Het protocol, dat naar verwachting in september af zal zijn, zal mikken op preventie en goed onderwijs in plaats van op maatregelen achteraf.

Het leren van de toekomst

Michel van Ast van het APS vertelt over een project dat op een school in Kampen heeft gedraaid. Daar zijn leerlingen drie weken lang ondergedompeld in de moderne technologie. Ze hadden de beschikking over tablets, gps-apparatuur, camera's enzovoorts. Ze kregen opdrachten die met behulp van die technologie moesten worden volbracht. De leerlingen werden actief en volgens eigen zeggen hadden ze 'Nu echt zin om naar school te gaan'.
'Natuurlijk is er een risico als je de techniek centraal stelt; dus zorg voor plan B', waarschuwde Michel. Maar de mogelijkheden die de techniek biedt, zijn zeker adembenemend en door het onderwijs nog lang niet allemaal benut.

Geogebra, de tool voor het wiskundeonderwijs

De zeer gedreven Marc de Hoog, onder andere ict-auteur bij Noordhoff, praat de collega's bij over het programma *Geogebra*. Dat programma is op veel plaatsen inzetbaar: bij verbanden, bij meetkunde en bij statistiek. Als je de mogelijkheden kent, blijken die schier eindeloos. Geogebra is te gebruiken als presentatietool voor je digibord, als hulpmiddel om mooie tekeningen te maken voor proefwerken, als oefenomgeving voor leerlingen en het is geschikt om leerlingen aan de slag te laten gaan met tekenen. Het bleef bij Marc niet bij een presentatie: iedereen ging met behulp van werkbladen zelf aan het werk om de mogelijkheden te onderzoeken. En natuurlijk vertrokken de deelnemers met huiswerk, want de 'les' was te kort om alle werkbladen gedaan te hebben. Maar wel *leuk* huiswerk!

Rekenen in beeld

Kees Hoogland van het APS heeft zijn bekende rustmoment weer ingebouwd door de deelnemers te laten kijken naar een PowerPoint-presentatie waar in korte tijd 80 slides voorbijkomen. Alle slides hebben iets te maken met cijfers of getallen.
Heel leuk was ook dit keer weer dat men precies kon aangeven dat men de eerste slide weer voorbij zag komen.
Kees heeft kort uiteengezet wat er verstaan wordt onder cijferen, realistisch rekenen en gecijferdheid. Het was een duidelijk verhaal met de nodige voorbeelden en aardige anekdotes. Zo liet hij het volgende zien:
160 – 10
780
60
4,9
400 / 50
4
390 × 290 × 860
29
30210196
Wat zou dit allemaal betekenen? Hebt u al een idee? (***Zie Noten***.)
Het APS heeft een rekentoets afgenomen, waarvan de resultaten zijn te vinden op *www.rekeneninbeeld.nl*. Als je dan het tabblad 'Achtergrond' aanklikt, vind je wetenswaardige informatie van deze toets. Je kreeg als deelnemer veel goede informatie mee.

Goede toetsopgave maken

Heel sterk was de bijdrage van Lonneke Boels die samen met Peter Hogendijk van Malmberg de deelnemers bij de hand nam om naar eigen opgaven te kijken. Zijn het nu 2F-opgaven? Tja, daar zit je dan! Best wel lastig. Hoe maak je een goede toets die een mooie verdeling over de vier domeinen in zich heeft? In het mbo werden de toetsen ingekocht, hoe anders is het in het vo. Bij het maken van toetsen waar veel individuele trajecten gevolgd worden, moeten de toetsen toch valide zijn. Ook hier kwam aan de orde dat een zogeheten *toetsmatrijs* heel nuttig en eigenlijk onmisbaar is, wil je valide toetsen produceren.
Valide:
meet wat je wilt meten
koppeling aan het leerdoel
vaardigheden bij het leerdoel
voldoende grote steekproef
taalniveaupassend
burgerschapsniveau
inhoudelijk correct
eenduidige vragen
duidelijke instructie

Boeiend hoe een en ander verder door deze twee mensen werd uitgewerkt.

Rekenen in andere vakken

Nelleke den Braber en Wim Spek van de SLO sloten goed aan door de aanbeveling 6 uit het referentiekader te laten zien:

Aanbeveling 6 – Gebruiken in andere leergebieden
Het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van het rekenen & wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties. De aanpak die in rekenen & wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en zoveel mogelijk worden gebruikt

Veel collega's waren speciaal naar deze workshop gekomen omdat zij op een of andere manier zich gingen bezig houden met het ontwikkelen (doorontwikkelen) van rekenbeleid op zijn/haar school. Lesstof van de verschillende vakken werd doorgenomen. Ook werd gelinkt aan het werk dat Henk van der Kooij namens FI en anderen al gedaan heeft met het project Rekenen in andere vakken (zie: *www.fi.uu.nl/vmbo/anderevakken/*).
U zult toch weer zelf aan de slag moeten maar het delen van ervaringen en het uitwisselen van *good practice* leverde ook hier een mooie workshop/presentatie op.

Afsluiting

Organisator Spijkerboer is tevreden over het verloop van de dag. Met een honderdtal deelnemers en een (te?) groot aantal keuzemogelijkheden was het onvermijdelijk dat voor een enkele workshop of presentatie geen belangstelling genoeg was. Daar stond tegenover dat er voor ieder wel iets van zijn of haar gading was te vinden. Rekenwonder Willem Bouman, toch de jongste niet meer, zag er aan het eind van de dag nog opmerkelijk fris uit. Was hij niet overstelpt met vragen? 'Nee, niemand heeft mij een vraag gesteld', vertelde hij enigszins teleurgesteld. De docenten hebben de kans laten lopen een vraag te stellen aan de man die in 2011 het wereldrecord 'opgaande delingen' heeft verbroken. Volgend jaar weer een kans, misschien niet op het rekenwonder, maar in ieder geval wel op een boeiende wiskundeconferentie voor vmbo en havo/vwo onderbouw.
En u weet het: als eerste aanmelden levert een bos bloemen op!

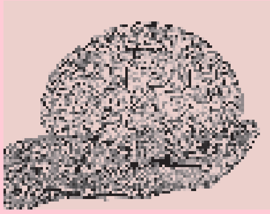
Noten

- De presentatie bij de lezing van J.P. Hogendijk is downloadbaar via: *www.jphogendijk.nl/talks/qiblautrecht.pdf*
- Een scan van een artikel in de *Nieuwe Wiskrant* (2002, nr. 2) over de Mekkawijzer is downloadbaar via: *www.jphogendijk.nl/publ/Mekkawijzers.pdf*
- De getallen betreffen opvolgend de werkdruk, opbrengst, watertoevoertemperatuur, aansluitwaarde, spanning, inhoud tank, L×B×H, gewicht en bestelnummer van een hogedrukspuit.

Over de auteurs

Joke Verbeek was tot september 2011 docent wiskunde op het Arentheem College in Arnhem. Ze schrijft mee aan een wiskundemethode en is lid van de redactie van *Euclides.*
E-mailadres: *jokeverbeek@chello.nl*
Gert de Kleuver is afdelingsleider op het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

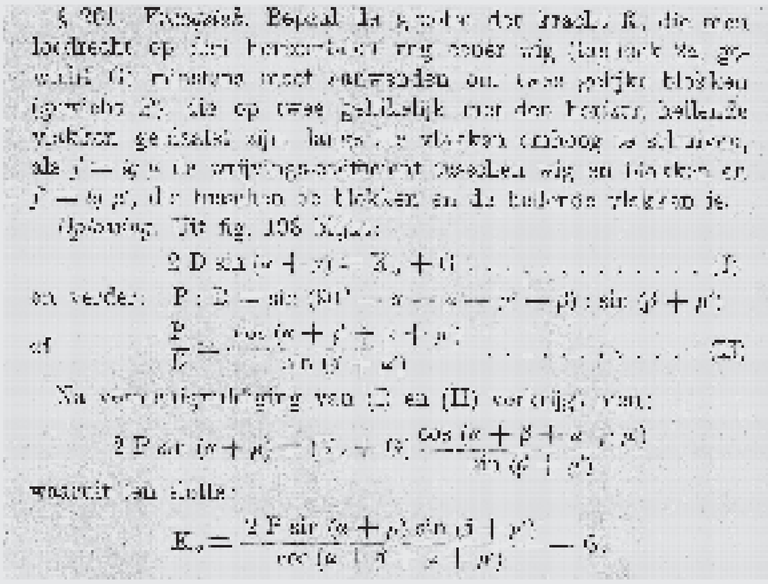
Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

SPOORLOOS VERDWENEN?

Op zaterdag 12 mei j.l. werd in Utrecht het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs gehouden. Het thema was deze keer 'Verdwenen vakken'. Het ging over vakken die lang op het programma van het voortgezet onderwijs hebben gestaan, maar daar al weer een hele tijd van zijn verdwenen. Het zijn vakken die niet alleen verdwenen, maar ook een beetje vergeten zijn. Op dat symposium is vooral aandacht besteed aan rekenkunde, stelkunde en beschrijvende meetkunde, maar er zijn er wel meer. Analytische meetkunde, zeker in de vorm zoals die decennia lang op het gymnasium en ook nog korte tijd op de HBS werd onderwezen, is ook zo'n vak. Hetzelfde geldt eigenlijk ook voor de traditionele planimetrie. Menig recent afgestudeerd wiskundige zal niet zomaar kunnen bewijzen dat de bissectrices van een driehoek door één punt gaan, of enig idee hebben van de stelling van Stewart.
Anders dan in de natuurwetenschappen zijn onderdelen van de wiskunde natuurlijk nooit achterhaald. Toch is het niet erg waarschijnlijk dat deze vakken ooit nog in het onderwijs zullen terugkeren. Ook al zijn ze niet achterhaald, verouderd zijn ze wel. Ze worden niet veel meer gebruikt, ze spelen in de moderne ontwikkelingen in de wiskunde geen rol en je kunt best een goede wiskundige zijn zonder veel van dit soort vakken af te weten. Natuurlijk, soms is het wel handig als je er toch iets van weet, al was het maar om te beseffen dat je er bij bepaalde problemen goed aan doet eens een specialist op zo'n terrein te raadplegen. Want die – vaak echte liefhebbers – zijn er natuurlijk wel. Maar terug op school, nee, dat zie ik niet meer gebeuren.
In deze aflevering van *Het Geheugen* wil ik stil staan bij twee andere verdwenen schoolvakken, waarmee het toch iets anders gesteld is. Het zijn de vakken *mechanica* en *kosmographie*. Geen wiskundevakken zult u zeggen, maar toch behoorden ze zo'n honderd jaar lang tot het werkterrein van menig wiskundeleraar. Toen in 1925 de voorganger van de NVvW werd opgericht was dat niet voor niets een vereniging van leraren in de WIskunde, MEchanica en COSmographie, in de wandeling Wimecos genoemd.

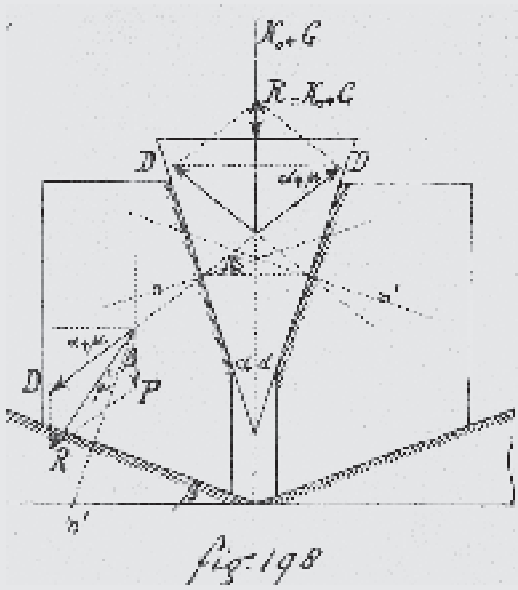
Het leerplan van de HBS

Het programma waarmee de nieuwe Hogere BurgerSchool in 1863 van start ging, omvatte een enorme lijst van vakken. Die moesten wel allemaal onderwezen worden, maar volgens Thorbecke, de opsteller van de wet, hoefden de leerlingen die niet allemaal te volgen. Ze mochten zelf kiezen welke lessen ze wel en niet wilden bijwonen. Het eindexamen omvatte echter wel alle vakken, maar Thorbecke was eigenlijk helemaal geen voorstander van zo'n eindexamen en dacht dat maar weinig leerlingen daaraan zouden deelnemen. Dat liep heel anders en het gevolg was dat die nieuwe HBS al spoedig met een overladen programma kampte. Tot dat overvolle programma behoorden de vakken *Beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica, van de kennis van werktuigen en van de technologie* en *Beginselen der kosmographie* (toen nog met een k!).
Waarom stonden die vakken daar? De wet en de bijbehorende stukken geven daar geen antwoord op, maar het programma van de HBS maakt de indruk dat het eenvoudigweg de vereniging is van alle vakken die in de tijd daarvoor op enige school voor voortgezet onderwijs werd onderwezen. Mechanica en werktuigkunde werden bijvoorbeeld onderwezen op een middelbare school in Den Haag die in 1829 was opgericht, en met technologie werd onder meer de scheikundige verwerking van grondstoffen bedoeld, een vak dat op de zogenoemde Industriecolleges werd onderwezen (***zie figuur 1*** en ***figuur 2*** op pag. 248). Tot de kosmographie behoorde naast sterrenkunde ook *de gedaante en de afmetingen der aarde, de wijze waarop deze bepaald worden, de plaatsbepaling op haar oppervlakte en aan de hemel.* Dat doet zowel denken aan geodesie als aan navigatie (***zie figuur 3*** op pag. 249)). Geodesie was een belangrijk vak op de polytechnische school, navigatie werd op zeevaartscholen onderwezen. Kortom, het waren vakken met een duidelijk toegepast en praktisch aspect, waaraan door de inpassing in de HBS een theoretisch fundament werd gegeven.
Maar, zoals gezegd, het programma van de HBS was overvol, en al spoedig moest daar wat aan gedaan worden. Vakken schrappen gebeurde niet, wel werden bestaande vakken ingeperkt. Zo werd in het examenreglement van 1901 bepaald dat de *kennis van werktuigen en van de technologie* zich diende te beperken tot wat daarover bij de natuur- en scheikunde behandeld werd, en omdat geen school dat natuurlijk dubbel ging doen, verdween dat onderdeel in de praktijk bij de mechanica. In het reglement van 1912 ging men nog een stapje verder en werd bepaald dat men zich diende te beperken tot *die beginselen der mechanica voorzover die voor eene degelijke beoefening*



§ 201. [illegible] Bepaal [illegible] die men loodrecht op [illegible] [illegible]
Oplossing. Uit fig. 198 [illegible]:
[illegible] . . . . (I)
en verder: [illegible]
of [illegible] . . . . (II)
Na vermenigvuldiging van (I) en (II) verkrijgt men:
[illegible]
waaruit dan volgt:
[illegible]

figuur 1 Een uitgewerkte opgave uit het *Leerboek der Mechanica* van C.B. Barto uit 1913. Hij was leraar aan de HBS in Breda en was werktuigbouwkundig ingenieur. De uitwerking is heel beknopt, maar de bijbehorende theorie was daarvoor uitvoeriger behandeld. Veel opgaven vereisten manipulaties met goniometrische formules, wat kan verklaren waarom die zo'n belangrijk onderdeel van het gonio-programma besloegen.



figuur 2 De bij de opgave behorende figuur. Deze komt uit de 'Atlas' bij het bij figuur 1 genoemde leerboek. Daarin staan ook een aantal fraai uitgewerkte tekeningen van katrollen, schroeven en tandwielen.

van de natuurkunde, overeenkomstig de [examen]*eischen voor dit vak* […] *noodig zijn*. Je zou zeggen dat het vak mechanica dan ook maar beter gelijk bij de natuurkunde gevoegd kon worden. Maar ja, zo werken die dingen niet en het duurde nog precies vijftig jaar voor het zoover was. Kosmographie verdween al spoedig van het eindexamen, maar bleef wel op het curriculum staan. In een aantal stappen werd het programma beperkt en in 1937 was het verschrompeld tot *Enkele hoofdstukken ter keuze van den leeraar: waarneming van sterrenbeelden en van de beweging der hemellichamen, vorm en beweging der aarde, het planetenstelsel, kometen en vaste sterren.* Iedere leraar kon daar naar eigen smaak een leuk stukje sterrenkunde van maken.
Hoogstwaarschijnlijk zijn beide vakken dus ooit met het oog op toepassingen in de praktijk in het HBS-programma terecht gekomen, maar na enkele decennia was daar niet veel meer van over. Ze waren even theoretisch geworden als het vak wiskunde zelf in die tijd.

Vakken in discussie

De bevoegdheidsregeling voor de HBS in 1863 was betrekkelijk eenvoudig. Iedereen met een doctoraal diploma wis- en natuurkunde was bevoegd voor alle B-vakken, en dus ook voor mechanica en kosmographie. Die vakken waren dus zeker niet voorbehouden aan leraren die in hoofdzaak wiskunde gaven; natuurkundeleraren konden die vakken net zo goed geven. Leraren met een wiskunde-akte in plaats van een doctoraal waren er niet voor bevoegd. In 1920 werd de bevoegdheidsregeling wat aangescherpt. Je was alleen nog maar bevoegd voor die vakken waarin je tijdens de studie ook echt examen of tentamen gedaan had. In die tijd waren de eerste jaren voor wiskundigen en natuurkundigen echter (vrijwel) identiek, inclusief mechanica en sterrenkunde. Beide groepen bleven dus bevoegd voor deze vakken.
In 1928 constateerde de Nederlandse Natuurkundige Vereniging echter: *De historische ontwikkeling heeft er in ons land toe geleid, dat de mechanica op de HBS meer als rationele mechanica veelal door de wiskundeleeraar gedoceerd wordt.* Met 'rationele mechanica' werd bedoeld dat het een zuiver theoretisch vak was, zich afspelend in een ideële maar niet bestaande werkelijkheid. Experimenten speelden geen rol. De natuurkundigen waren daar zeer ontevreden over, en dat leidde tot een verwoed debat tussen beide partijen. De wiskundigen, onder aanvoering van E.J. Dijksterhuis, verzetten zich heftig tegen de aanspraken van de natuurkundigen op de mechanica. Ze beriepen zich daarbij op allerlei wetenschappelijke, historische en didactische argumenten, maar allicht zullen menselijke motieven, zoals de tegenzin een stukje werkgelegenheid voor wiskundigen af te staan, ook een rol hebben gespeeld.
De strijd werd pas in de jaren vijftig beslecht. Een belangrijke rol daarbij speelde Hans Freudenthal. Hij was door zijn zoon, die op de HBS zat, met het vak in contact gekomen en was verbijsterd over wat hij zag. In 1952 hield hij een lezing over het mechanica-onderwijs, waarin hij zowel met gebruikte boeken, als met de theoretische aanpak de vloer aanveegde. *Een prulwetenschap*, was zijn conclusie, die tot ontzetting van het bestuur van Wimecos de krant haalde. Tot overmaat van ramp waren de examenresultaten voor mechanica in 1953 desastreus (***zie figuur 4***). Hoe het Wimecos-bestuur zich ook verzette, in 1962 viel het doek. Mechanica werd bij de natuurkunde gevoegd en dat vak kreeg daarvoor drie van de vier jaaruren die voor mechanica beschikbaar waren geweest, er bij. Wiskunde kreeg één uur er bij om wat meer aan toepassingen te kunnen doen. Cosmografie, om de later gangbare spelling te gebruiken, hield het een paar jaar langer uit. Het vak had dan ook veel minder aanstoot gegeven. Het omvatte maar één jaaruur, en een concurrerend vak bestond er niet. Sterrenkundigen vonden het vermoedelijk allang best als er wat aan hun vak op school gedaan werd, al was dat dan door docenten die niet altijd even deskundig waren. Toen bij de invoering van de Mammoetwet eind jaren zestig de HBS verdween, verviel ook het vak cosmografie. De Nederlandse Astronomen Club tekende, bij monde van de Utrechtse hoogleraar

Marcel Minnaert, nog protest aan tegen die verdwijning en vroeg daarvoor steun van Wimecos. Die zullen daar wel gemengde gevoelen bij hebben gehad, want dezelfde Minnaert had Freudenthal van harte ondersteund in zijn aanval op de mechanica. Of die steun gegeven is, is niet uit het Wimecos-archief op te maken, maar geholpen heeft het in ieder geval niet.

Schoenmaker, houd je...

In een historische rubriek wil je altijd graag parallellen trekken met het heden, of op z'n minst lessen uit de geschiedenis halen. Dat is hier niet zo voor de hand liggend, maar toch valt één ding op. Mechanica werd vooral gegeven door leraren wier vak dat eigenlijk niet was. Natuurlijk hadden ze op de universiteit wel mechanica gehad, en zelfs een heleboel natuurkunde, maar toch waren ze niet toevallig wiskundeleraar geworden, zelfs al hadden ze ook een bevoegdheid voor natuurkunde. Illustratief is de grote Dijksterhuis zelf, die ook wel wat lessen natuurkunde gaf en het daarbij aan kennis niet ontbrak, maar volgens een oud-leerling 'niet bepaald een begaafd experimentator was' en de proeven veiligheidshalve aan de amanuensis overliet. In het begin van de HBS diende mechanica er vooral voor om te begrijpen hoe werktuigen in elkaar zaten en waarom ze functioneerden, later was het eigenlijk bedoeld ter ondersteuning van de natuurkunde. Het is dan raar om het door wiskundigen te laten geven en is het niet verbazingwekkend als natuurkundeleraren dan niet tevreden zijn over het resultaat. En zo is er toch nog een parallel en een les. Een vak moet gegeven worden door leraren wier vak het is en wier hart daar ligt. Natuurlijk, als je er wat van weet kun je als wiskundeleraar ook wel eens een ander vak geven. De schoolboekjes kun je wel volgen en de sommetjes kun je ook wel maken. Sommige rectoren, schoolbesturen en politici denken dat zoiets genoeg is. Maar als dat op grote schaal gebeurt, is dat voor de levende toekomst van een vak op termijn rampzalig. De verwording van de schoolmechanica tot *prulwetenschap* is daarvan een treffende illustratie.

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

VIII —

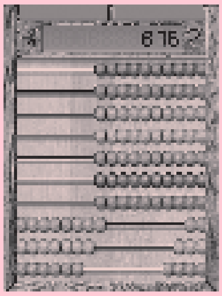
figuur 3 Een deel van de inhoudsopgave van *De beginselen der Kosmographie*, van dr. E. van der Ven uit 1873. Duidelijk is dat kosmographie in de beginjaren meer inhield dan alleen sterrenkunde. Van der Ven was begonnen als observator aan de Leidse sterrenwacht, werd leraar wiskunde aan het Leids gymnasium en was vanaf de oprichting in 1864 directeur van de HBS in Haarlem.

[illegible]

figuur 4 Deel van de brief van het bestuur van Wimecos aan de inspectie over de problemen met het eindexamen Mechanica in 1953. De paniek moet aanzienlijk zijn geweest, want na de rel over de uitspraken van Freudenthal was dit wel het laatste wat het bestuur kon gebruiken.

Wiskunde digitaal

KOKO MATH VERSIE 2.1



[Lonneke Boels]

Geschikt voor:
iPhone, iPad, Android, Windows Phone 7



Het spel Koko Math oefent de basisbewerkingen van rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en cijferen met getallen tot 100. Het spel start standaard met optellen over het tiental tot twintig. Een aantal zaken zijn hierbij direct in te stellen:

- het niveau. Er kan aangegeven worden welk getal het hoogste is dat in de bewerking voorkomt. Hierdoor is heel precies in te stellen of bijvoorbeeld optellingen onder de tien, over het tiental tot twintig, over de twintig tot honderd of over de honderd worden getoond.
- de vorm. Bij, bijvoorbeeld, optellingen kan gekozen worden uit de vorm 3 + 3 = ?, 3 + ? = en 3 ? 3 = 6. Een combinatie van deze vormen is ook mogelijk.
- het aantal opgaven (standaard is 10).
- wel of geen tijdslimiet per opgave (standaard is geen of 5 seconden).

Het spel heeft een toetsenbord dat lijkt op een rekenmachine (maar dat uiteraard niet is) en een 'krijtjesbord' waarop een berekening kan worden geschreven. Dit is met name voor de moeilijkere opgaven handig (deze kunnen dan cijferend worden opgelost). Het merendeel van de opgaven zal echter met hoofdrekenen mogelijk zijn en – na enige oefening – dan ook sneller gaan. Door de tijdslimiet (steeds korter) in te stellen, wordt een leerling uitgedaagd om steeds sneller te hoofdrekenen. Na afloop van één of meerdere series opgaven zijn de resultaten te versturen per e-mail. In de e-mail staan dan de opgaven in een tabel waarin is aangegeven wat de opgave (som) was en wat het antwoord. Als in de kolom goed een kruisje staat, is de opgave fout (zie bovenstaand plaatje).
Je ziet als docent ook of de opgave aan het einde over is gedaan ('yes'). Als dan alsnog een correct antwoord is gegeven, wordt het eerste foute antwoord niet meer getoond.

Daarnaast is per operator (+, -, ×, :) aangegeven hoeveel de leerling er goed had, hoeveel fout, en wat het niveau is (in de vorm van het hoogste getal dat in de bewerking voor mocht komen). De e-mails kunnen worden gebruikt om de vorderingen van leerlingen in de tijd te bewaken.

Pluspunten

- Het spel kent meerdere niveaus.
- Er is veel in te stellen: de vraagvorm, de moeilijkheidsgraad, het type bewerking, door elkaar of niet, wel of geen tijdslimiet.
- Doordat resultaten kunnen worden verstuurd per e-mail, is een (digitaal) dossier van de vorderingen van leerlingen op te bouwen.
- In het overzicht in de e-mail staat precies welke opgaven de leerling heeft gemaakt en in hoeveel tijd.
- De koopversie gebruikt Nederlandse termen (*instelling* in plaats van *settings*).
- Tafels zijn apart te oefenen met de keuze of de tafel in volgorde of gemixt voorkomt.
- Het spel is uitstekend geschikt om de basisbewerkingen van automatiseren naar memoriseren te krijgen.
- Het spel is ook te gebruiken voor het oefenen van cijferen. Bij optellen zal cijferen nauwelijks nodig zijn; bij vermenigvuldigen en delen wel.
- Het cijfertoetsenbord kan ook links worden geplaatst (voor linkshandige kinderen).

Minpunten

- Het is niet mogelijk om bijvoorbeeld onderscheid te maken tussen optellingen boven de twintig zonder overschrijding van het tiental of met overschrijding van het tiental.
- Ditzelfde geldt bijvoorbeeld voor optellingen over de honderd (het maximum is 100 + 100).
- Zodra iets aan de instelling wordt veranderd, worden de resultaten weggegooid.
- Bij *tafels willekeurig* wordt echt willekeurig een opgave gekozen uit de tafel. Dit betekent dat het kan voorkomen dat 3 × 2 tweemaal achter elkaar wordt gevraagd en in totaal drie keer bij 10 opgaven. In dezelfde reeks overkwam het mij dat bovendien ook dat in totaal driemaal 5 × 2 werd gevraagd.
- Als na herhalen van een opgave het antwoord correct wordt genoteerd, wordt het foute antwoord niet meer getoond in het overzicht in de e-mail.

Geschikt voor groep 3 tot en met groep 8 (oefenen en onderhouden basisbewerkingen en cijferen).
Geschikt voor vmbo basis/kader. Oefent uitsluitend 1F-niveau rekenen.

Eindoordeel: aanschaffen

Kostprijs

- Er is een gratis versie die alleen kan optellen en de resultaten na veranderingen in de settings weggooit.
- De volledige versie kost € 0,79
- Meer informatie over het spel: *www.beensoft.nl*

Over de auteur
Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

BOEKBESPREKING /

De Getalmysteries



[Jacques Jansen]

Ondertitel: Een wiskundige reis door het dagelijks leven
Auteur: Marcus Du Sautoy
Oorspronkelijke titel: The Number Mysteries
Uitgever: Nieuwezijds B.V., Amsterdam (Nederlandse vertaling 2011)
ISBN 978 90 5712 330 6
Prijs: € 19,95 (254 pagina's, paperback)

Wie is Marcus Du Sautoy?

Marcus Du Sautoy (***zie figuur 1*** op pag. 252) is in Londen geboren op 26 augustus 1965. Momenteel is hij hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Oxford. Du Sautoy houdt zich onder meer bezig met het populariseren van de wiskunde. Zo is hij ook auteur van het boek *Het Symmetriemonster* en bekend als presentator van de BBC-series *The Story of Maths* en *The Code & The Music of the Primes*. Het is zeer aan te raden deze series, die inmiddels op dvd zijn verschenen, te bekijken.

Reiziger

Du Sautoy is de man van de wiskundereizen. De wiskundewereld is uitgestrekt, vaak ontoegankelijk maar met wonderschone plekken en uitzichten vanaf duizelingwekkende hoogtes. Du Sautoy reist graag en uit zijn docu-series blijkt hij een enthousiast verslaggever te zijn van deze plekken.
Al zou je niets met wiskunde hebben, hij weet je te motiveren voor het bezoeken van landen aan de Middellandse Zee en het Verre Oosten. De wiskundewereld is niet overal even toegankelijk, maar waar hij wel toegankelijk is, is hij vaker door verschillende auteurs betreden en beschreven. Het verschil tussen die auteurs en Du Sautoy is dat de laatste een wiskundige is, dus niet alleen kennis van zaken heeft, maar die ook in begrijpelijke taal boeiend uiteen kan zetten. Lees bijvoorbeeld als smaakmaker het eerste hoofdstuk van dit boek over 'het land van de priemgetallen', waarvan de eerste 27 bladzijden zijn te lezen via de website van de uitgever [1]. Er zijn prachtige weiden te ontdekken die voor een ieder beloopbaar zijn. Naar welke gebieden brengt Du Sautoy ons en hoe onderscheidt hij zich van andere reisverslaggevers? Een bijkomende vraag is: hoe zou je zijn bevindingen direct in een lessituatie kunnen inzetten?

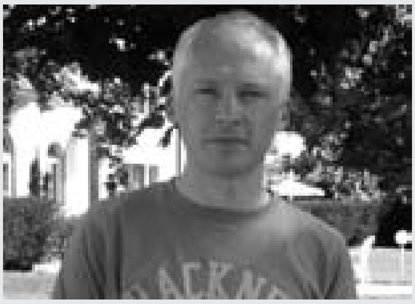
Vijf gebieden met hun eigen onopgeloste mysteries

Het gaat bij Du Sautoy om vijf gebieden. Hij beschrijft bij elk gebied een mysterie. Het oplossen van een van deze mysteries levert je een miljoen dollar op, uitgeloofd door de Amerikaanse zakenman Landon Clay.
Het land van de 'priemgetallen' met als miljoen-dollar-probleem het bewijzen van de Riemann-hypothese. We weten al sinds Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn en sinds Riemann dat het voorkomen van priemgetallen steeds schaarser wordt hoe verder men 'voortschrijdt' in de natuurlijke getallen. Hieraan gekoppeld formuleerde Riemann een veronderstelling, die op de dag van vandaag onbewezen is.
Het land van de wonderbaarlijke vormen van de natuur. Van dobbelstenen tot zeepbellen, van theezakjes tot sneeuwvlokken. Het onopgeloste mysterie: 'Welke vorm heeft ons universum?'.
Het land van de spelletjes en winnende reeksen. Van Mancala tot Monopoly. Van het Japanse Go-spel tot de pokertafels van Las Vegas. Met als één van de lastigste miljoen-dollar-problemen: 'het inlaad-probleem'.
Het land van de codes genaamd 'Cryptografie'. Het gaat niet alleen om het decoderen van berichten maar met name om het maken van nieuwe veilige codes. In dit land is de uitdaging het mysterie van Birch en Swinnerton-Dyer op te lossen. Een toepassing hierbij kan zijn het beveiligen van een creditcard.
Het land van de toekomst. Het voorspellen van de toekomst met behulp van wiskundige vergelijkingen. Hierbij is het onopgeloste probleem 'het probleem van de turbulentie'.

Du Sautoy slaagt erin aan een onervaren reiziger duidelijk te maken om wat voor een mysterie het precies gaat. Bovendien legt hij helder uit wat we in de praktijk eraan hebben om zo'n mysterie op te lossen. Bij het vormenland gaat het om de meetkunde. De oud-Griekse filosoof Plato had boven zijn deur een bord opgehangen met de spreuk 'Hij die geen meetkunde kent, trede hier niet binnen'. Du Sautoy geeft de lezer een toegangsbewijs om het land van Plato te betreden, maar wel met een smartphone op zak.

Inzetten van smartphone

We maken kennis met de evolutie van de voetbal. Het blijkt dat de Platonische lichamen een belangrijke rol hierbij hebben gespeeld. Sowieso reist Du Sautoy graag met een bal aan de voet door wiskundeland, liefst met een smartphone op zak. Het boek bevat veel QR-codes. Op een voor QR-codes geschikte smartphone moet je wel eerst een QR-codelezer downloaden. Om te scannen zet je de codelezer aan en houd je de cameralens in goed licht boven de code om vervolgens toegang te krijgen tot een interessante website; zie ***figuur 2*** en de noten [1] en [2].
Van het maken van de rondste voetbal komen we via via terecht op *La Grande Axe* van Parijs. Elke Franse president meent het land achter te moeten laten met een groot monument. Zo ook François Mitterand, die zorgde voor het enorme poortgebouw *La Grande Arche*; ***zie figuur 3***. *La Grande Arche* is een projectie van een vierdimensionale kubus in de driedimensionale Franse hoofdstad. Du Sautoy slaagt erin om voor de lezer de abstracte hyperkubus een schaduw te geven. Ook met behulp van het schilderij van de kunstenaar Salvador Dali *De kruisiging van Christus* (Corpus Hypercubus); ***zie figuur 4a en 4b***.
Van hyperkubus naar hyperdonut. Du Sautoy laat ons zien welke vormen er bedacht zijn voor ons alsmaar uitdijende universum en daagt ons uit met een al eerder genoemd miljoen-dollar-probleem.

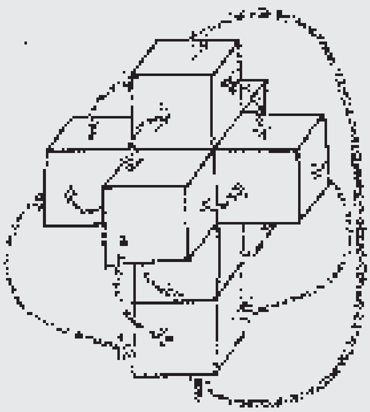


figuur 1

figuur 2



figuur 3



figuur 4a



figuur 4b

In het land van de toekomst laat Du Sautoy ook weer zijn favoriete voetbalsport terugkomen. Hij laat zien hoe de Brit Wayne Rooney met behulp van een tweedegraads vergelijking een vrije trap van landgenoot Beckham verlengt met een perfect getimede lob en daarmee een schitterend doelpunt weet te scoren.

Wat kan ik ermee in de klas?

Het boek lijkt geschikt als inspiratiebron voor leerlingen die een profielwerkstuk willen schrijven. Verschillende lessituaties zullen meer kleur krijgen door zo nu en dan gebruik te maken van diverse getalmysteries. Een organisator van een China-dag op mijn school vroeg aan mij of ik een workshop Chinese wiskunde wilde verzorgen voor 4-vwo leerlingen. Ik heb een Powerpoint-presentatie [2] in elkaar gezet en rijkelijk ideeën geput uit dit reisboek en de docu-serie *The Story of Maths*. Het boek leert ons dat de Chinezen vermoedelijk als een van de eersten de priemgetallen als belangrijke getallen beschouwden. Zij presenteerden getallen met bamboestokjes en gebruikten hierbij al het positiestelsel. Tijdens de workshop legden leerlingen het huidige aantal inwoners van China met behulp van satéstokjes.
Leerlingen losten ook het volgende probleem (soms door *trial and error*) op.

Een pruim en drie perziken wegen samen 15 gram. Twee pruimen en een perzik wegen samen 10 gram. Hoeveel weegt één pruim en hoeveel weegt één perzik?

Daarna kregen leerlingen een stukje uit de docu-serie te zien hoe duizenden jaren geleden de Chinezen dit probleem zonder algebraïsche symbolen wisten op te lossen. Je ziet in de film hoe Du Sautoy op een markt met een weegschaal aan de slag gaat. (Het is wel verstandig om aan de leerlingen mee te delen dat het niet de bedoeling was om een perzik of een pruim apart te wegen.) Du Sautoy verdubbelt de schaalvulling: twee pruimen en zes perziken (30 gram). Vervolgens haalt hij twee pruimen en een perzik weg. De overgebleven vijf perziken wegen samen 20 gram. Een perzik weegt dus 4 gram en een pruim 3 gram. Daarna is het aardig om te laten zien hoe wij nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen.

Aanrader

Dit boek moet je in je boekenkast hebben. Een aanrader dus. Niet vergeten de prachtige BBC-series. Een beetje sectie wiskunde schaft natuurlijk deze op dvd verschenen series aan. Ze zijn verkrijgbaar onder meer via de webwinkel van de *NRC* (zie: *www.nrclux.nl*).

Noten

[1] Zie: *www.nieuwezijds.nl/Blader/9789057123306.swf* (Flash formaat)

[2] Deze presentatie is te downloaden via de NVvW-website: *www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(876)china.ppt* (ca. 5,7 Mb)

Over de recensent

Jacques Jansen is docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop.
E-mailadres: *j.jansen@strabrecht.nl*

Info [Red.]

Van de achterkaft – We weten allemaal dat we zonder wiskunde de wereld niet kunnen doorgronden. Maar wist je ook dat voetballer Wayne Rooney een tweedegraads vergelijking oplost, iedere keer als hij een voorzet krijgt en de bal in het doel schiet? Dat je priemgetallen gebruikt als je online winkelt? Dat zeepbellen lui zijn?
Marcus du Sautoy – wiskundige, voetballer, muzikant – leert je hoe je je winstkansen verbetert bij Monopoly en poker, hoe je onkraakbare codes breekt, hoe je de vorm van het heelal kunt achterhalen en hoe je de toekomst kunt voorspellen. In *De getalmysteries* laat hij zien dat wiskunde eigenlijk aan de basis staat van alles wat we doen.
De getalmysteries is een rijk geïllustreerd wiskundeboek voor alle leeftijden, boordevol verhalen, spelletjes en puzzels.

'Marcus du Sautoy's liefde voor getallen spat van iedere pagina.' – Richard Dawkins

Rekenen in andere vakken in vo en mbo

[Monica Wijers en Vincent Jonker]

Zit er rekenen in andere vakken?
Het antwoord op deze vraag is volmondig 'ja'. Niet in elk vak evenveel, maar het is op allerlei plekken aanwezig. Als er gewerkt wordt met percentages, als eenvoudige berekeningen moeten worden uitgevoerd, een geldbedrag moet worden berekend, een tijd-tabel moet worden gelezen, een grafiek moet worden afgelezen, een hoeveelheid of gewicht, lengte, oppervlakte of een andere grootheid moet worden gemeten, het gaat maar door. Bij sommige vakken is het rekenen ook heel duidelijk terug te vinden in de lesboeken (met andere paragrafen, en met eigen didactiek).
In het *Referentiekader Rekenen* wordt aandacht gevraagd voor zowel het paraat hebben van de noodzakelijke basale rekenkennis, als aan het functioneel kunnen inzetten van die kennis.

Het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van rekenen en wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties.
Aanbeveling 6 – 'Gebruiken in andere leergebieden' in het Eindrapport Commissie Meijerink ('Over de drempels met rekenen').

Dat functioneel inzetten gebeurt bijvoorbeeld op het moment dat de leerlingen in andere vakken een rekenkundig probleem moeten oplossen, waarbij ze rekenvaardigheden inzetten. Op dat moment moet de leerling wendbaar zijn in het gebruik van rekenkennis en -vaardigheden. Door het gebruik van die vaardigheden wordt er tevens aandacht besteed aan het onderhouden van die vaardigheden.

Vo en mbo
In het jaar 2010-2011 is studie verricht naar rekenen in andere vakken.[1] Voor vmbo is een website ingericht waarin per vak gekeken kan worden wat het gehalte rekenen is.[2] Dit is gebaseerd op een analyse van de examenprogramma's en een aantal examens van het betreffende vak (***zie figuur 1***).
Per vak is een beknopte samenvatting aanwezig waarin het rekenen dat voorkomt, wordt getypeerd in termen van het referentiekader, en er zijn voor elk vak voorbeelden beschikbaar . Deze voorbeelden kunnen per vak worden bekeken en er kan ook op trefwoord worden gezocht. De voorbeelden zijn gehaald uit recente examens die per vak beschikbaar zijn.
Het beeld dat hieruit naar voren komt, is dat er in de centraal schriftelijke (praktijk) examens voor het vmbo in de meeste vakken rekenen voorkomt. Dat betekent dat de betreffende avo- en praktijkdocenten al gewend zijn voldoende aandacht te besteden aan het rekenen dat specifiek bij het vak voorkomt. Toch is dit niet altijd voldoende, want deze docenten geven ook aan dat hun leerlingen niet altijd voldoende goed scoren op die rekenkundige opgaven.
Dergelijke gegevens over rekenen in andere vakken zijn inmiddels ook beschikbaar voor havo/vwo.[3] Daartoe is een analyse uitgevoerd in samenwerking met een aantal vakverenigingen en docenten van andere vakken zoals economie en aardrijkskunde.[4]
In het mbo is al eerder (2009) een analyse uitgevoerd hoe rekenen verweven zit in de kwalificatiedossiers.[5] Daar zijn toen, niet geheel verwonderlijk, grote verschillen geconstateerd tussen de verschillende sectoren in het mbo en ook binnen de sectoren voor de verschillende opleidingsrichtingen. Het ene beroep vraagt nu eenmaal meer op het gebied van rekenvaardigheden dan het andere. Daarnaast is ook gekeken naar de noodzakelijke rekenvaardigheden voor burgerschap. Die vaardigheden zijn natuurlijk wél voor iedereen gelijk. In de uitwerking van het referentieniveau tot een examenkader (syllabus) is dan ook het rekenen voor burgerschap als uitgangspunt genomen.

Voorbeeld – We geven een voorbeeld om een en ander te illustreren. ***Zie figuur 2.***
De vraag bij deze bestelling voor éénjarig pootgoed: 'Hoeveel procent BTW wordt op pootgoed geheven?'

	Vak	*Domein* Getallen	Verhoudingen	Meten	Meetkunde	Verbanden
–	Aardrijkskunde	★★☆	★★☆	★★☆	★★☆	★★★
–	Biologie	★☆☆	★☆☆	★☆☆	★☆☆	★★★
–	Bouw – Breed	★☆☆	★☆☆	★★☆	★★★	★☆☆
–	Consumptief – Breed	★★☆	★★☆	★★☆	☆☆☆	★★☆
–	Economie	★★☆	★★☆	★☆☆	☆☆☆	★★☆
–	Elektrotechniek	★★☆	★☆☆	★★★	★★☆	★★★
–	Grafische technieken	★☆☆	★☆☆	★★☆	★☆☆	★☆☆
–	Handel en Administratie	★★☆	★★★	★☆☆	☆☆☆	★★☆
–	Landbouw – breed	★★☆	★★☆	★★☆	★☆☆	★★☆
–	Landbouw – productiedieren	★★☆	★★☆	★★☆	★☆☆	★★☆
–	Mode en Commercie	★★☆	★★☆	★☆☆	★★☆	★★☆
–	Sport, Dienstverlening en Veiligheid	★★☆	★☆☆	★☆☆	★☆☆	★★☆
–	Transport en Logistiek	★★★	★☆☆	★★☆	★★☆	★★☆
–	Voertuigentechniek	★★☆	★★☆	★★★	★★☆	★★★
–	Zorg en Welzijn – Breed	★☆☆	★☆☆	★☆☆	☆☆☆	★☆☆

figuur 1 In de analyse van schoolvakken is per domein en per vak het 'rekengehalte' geïnventariseerd (*www.fisme.science.uu.nl/vmbo/anderevakken*)

best. eenh.	aantal	artikel	btw	prijs (€)	totaal (€)
Hierbij bevestigen wij uw bestelling voor de navolgende artikelen.					
1	1x380 PL	AGARATUM	L	46,00	17,48
1	1x380 PL	BEGONIA D.Rose	L	46,00	17,48
1	1x380 PL	BEGONIA Red	L	46,00	17,48
1	1x150 PL	BEGONIA Scarlet	L	132,00	19,80
1	1x375 PL	CINERARIA Silver	L	42,00	15,75
1	1x250 PL	HELIOTROPIUM Marine	L	90,00	22,50
1	1x365 PL	IMPATIENS Mixed	L	58,00	21,17
2	2x385 PL	LOBELIA Pearls	L	30,00	23,10
1	1x355 PL	TAGETES Mixed	L	50,00	17,75
2	2x380 PL	VERBENA Mixed	L	63,00	47,88
1	1x250 PL	OSTEOSPERMUM Mixed	L	165,00	41,25
1	1x385 PL	LOBELIA Blue	L	30,00	11,55
Trays	14	planten 4800	Subtotaal		273,19
			Heffingen		1,88
			Bedrag ex BTW		275,07
			BTW		16,50
			Order totaal EUR		291,57
Betalingsvoorwaarde: 14 dagen na factuurdatum					

figuur 2 Een examenvraag uit vmbo (landbouw-breed)

Dit vraagstuk kan op diverse niveaus worden opgelost. Zo kan er bijvoorbeeld direct kennis bij de leerling aanwezig zijn over het gebruikte BTW-tarief bij pootgoed. Een tweede niveau van oplossen is de aanname dat het wel zal gaan om 6% of 19% BTW, en op basis daarvan kijken wat in dit geval geldt (door naar de getallen te kijken en wellicht even te rekenen). Een derde niveau van oplossen is het simpelweg gebruiken van de gegeven getallen en het percentage uitrekenen. Overigens kunnen hier verschillende oplossingen (en hulpmiddelen) bij gebruikt worden. Het blijkt dat docenten met verschillende achtergrond ook kiezen voor verschillende didactische aanpakken.
Wanneer bepaalde onderdelen van het referentiekader Meijerink niet in de beroepscontext voorkomen, zal bekeken moeten worden hoe deze onderdelen (eventueel in aanvullende lessen) wel aangeboden kunnen worden.[6]

Kun je taken verdelen onder docenten?

Het vergt wel het nodige van een team om de rekentaken gezamenlijk op te nemen. Er zal ten eerste helderheid moeten zijn over wie enige coördinatie kan verzorgen. Dit zou een rekencoördinator kunnen zijn, een docent die hiervoor een aparte taak heeft gekregen en die goed op de hoogte is van rekendidactiek. De vraag is wat er op langere termijn mogelijk is binnen het beleid van de scholen. Binnen de onderwijsteams (vmbo, havo/vwo, mbo) is er zeker bereidheid om de extra aandacht voor rekenen ter hand te nemen, maar hoe doe je dat precies?

Er moeten allerlei praktische beslissingen genomen worden:

- Hoe wordt gezamenlijk zicht gekregen op het niveau van de leerlingen (instaptoetsing, nulmeting, verlengde intake, gesprekken e.d.)?
- Welke ondersteuning wordt op welke manier gegeven met behulp van extra lessen, of individuele trajecten voor leerlingen?
- Is er gezamenlijke scholing voor docenten?
- Hoe wordt het gebruik van de rekenmachine gepositioneerd?
- Wat reken je goed in het leerlingwerk bij proefwerken in de diverse vakken? Wil je een uitwerking in stapjes zien, zodat je kunt zien hoe de leerling tot het antwoord is gekomen?
- Schoolbrede afstemming is belangrijk voor de leerling zodat deze weet wat er verwacht wordt.
- Maak je afspraken over de instructie voor leerlingen?

Veel docenten geven aan te weinig te weten over wat de huidige leerlingen aan ‘rekenbagage’ hebben meegenomen van de basisschool. Wat wordt wel aangeleerd en op welke manier en wat wordt niet aangeleerd? Er zijn inmiddels wel producten op de markt die voorzien in informatie op dit gebied.[7] Docenten van andere vakken putten natuurlijk als vanzelf uit hun eigen ervaringen van toen zij zelf op de basisschool zaten (‘Hoe heb ik het zelf geleerd, dat kan ik tenminste voordoen bij mijn leerlingen’). Men is zich inmiddels wel bewust dat er een verschil kan zijn in hoe men zelf bepaalde vaardigheden heeft aangeleerd en hoe dat thans door leerlingen in het huidige onderwijs is geleerd. Veel docenten stellen zich hier pragmatisch op: eerst maar eens kijken wat de leerlingen voor oplossingsprocedures hebben. Als de kennis van deze procedures voldoende is, kan dit zo gelaten worden.
Bij leerlingen met grote achterstanden wordt het lastiger. Deze zijn vaak ook minder vaardig in het flexibel gebruik van oplossingsprocedures. Hier zal de betrokken docent ook meer kennis moeten hebben over hoe eventuele achterstanden nog ingehaald kunnen worden en hoe aangesloten kan worden op de gebruikte oplossingsprocedure bij de leerling. Dit is vaak lastig, omdat de betrokken leerlingen vaak al vanaf niveau groep 6 hiaten in hun kennis vertonen (procenten, breuken, verhoudingen, kommagetallen).

Bieden onderwijsmethoden ondersteuning?

Voor rekenen in vo en mbo zijn inmiddels allerlei rekenmethodes op de markt gekomen. De huidige generatie rekenboeken in vmbo en mbo en is ontstaan op het moment dat er nog niet veel zicht was op de toetsen die straks gebruikt zullen worden bij examinering (2013-2014). Dat betekent dat die boeken zelf een interpretatie moesten geven van het Referentiekader Rekenen en dat betekent dat de methodes nog niet uitgebalanceerd zijn.
Het is belangrijk bij het inrichten van het onderwijs kritisch te zijn op wat er in de methodes geboden wordt. Het klakkeloos volgen van de inhoud van deze boeken kan voor sommige leerlingen onnodig veel ballast met zich meebrengen.
We willen alle docenten van beroepsgerichte (en relevante avo-)vakken vragen of zij zelf een goed beeld willen vormen wat wordt verstaan onder de niveaus 2F en 3F. Vervolgens kunnen zij in hun eigen boeken terugzoeken hoe de onderdelen daar aan bod komen en besluiten waar men zelf extra of juist minder aandacht aan de diverse rekenonderwerpen kan geven.

Conclusie

Het benutten van rekenen in andere vakken ligt voor de hand, omdat dit direct een functionele aanpak oplevert en een natuurlijke setting om rekenvaardigheden te onderhouden. Echter, voor de komende periode (tot en met de eerste examens en toetsen in 2013-2014) is dat waarschijnlijk niet voldoende en daarom zal er een extra inspanning in de scholen moeten plaatsvinden. Daarna mag verwacht worden dat leerlingen met een voldoende rekenniveau binnenkomen en dan is het functioneel gebruiken van de verworven vaardigheden een ideale manier om rekenen te onderhouden.

Noten

[1] V. Schmidt (2010): *IJking referentiekader rekenen versus examenprogramma's wiskunde vmbo*. Enschede: SLO.
[2] De producten zijn te vinden op « *www.fi.uu.nl/vmbo/rekenen* ».
[3] Zie: *www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Rekenen_in_vakken_havo/vwo*
[4] Dit wordt uitgevoerd in samenwerking met de VVVO (samenwerkende vakverenigingen). De bevindingen zullen verspreid worden in het project ‘Rekenen in andere vakken’ (samenwerking FI, SLO, APS en enkele andere partners).
[5] Zie: « *www.fi.uu.nl/mbo/kwalificatiedossiers* ». Voor alle uitstroomprofielen van het mbo is gekeken hoe rekenen voorkomt en is een check uitgevoerd op het niveau 3F.
[6] Het apart oefenen van rekenvaardigheden kan bijvoorbeeld goed met het programma zOEFi (zie: *www.fi.uu.nl/zoefi*).
[7] Zie: « *www.rekenlijn.nl* » en « *www.kennisbankrekenen.nl* ».

Over de auteurs

Vincent Jonker en Monica Wijers zijn werkzaam bij het Freudenthal Instituut (po, vo, mbo) van de Universiteit Utrecht.

Sommen en authentieke problemen

REKENMETHODES EN TOETSING 2F EN 3F

[Cathe Notten en Marjanne de Nijs]

Voor deze special van *Volgens Bartjens* en *Euclides* hebben de hoofdredacteuren aan makers van verschillende methodes voor vo en mbo gevraagd opgaven te selecteren op niveau 2F en 3F.[1] Er blijkt in de dagelijkse onderwijspraktijk namelijk nogal wat onduidelijkheid te bestaan over wat nu eigenlijk precies bepaalt of een opgave als 2F of 3F gekwalificeerd moet worden. Reden voor hen om ook deskundigen te vragen hoe zij aankijken tegen opgaven in die methodes.

Mini-marktonderzoek

De methodes die nu op veel scholen voor vo en/of mbo gebruikt worden, zijn over het algemeen ontwikkeld op basis van het referentiekader zoals dit door de commissie-Meijerink is verwoord. De methodemakers (en uitgevers) konden op het moment van ontwikkeling nog niet voorzien welke keuzes er voor examinering en toetsing gemaakt zouden worden, omdat er nog geen syllabi (mbo) en rekentoetswijzers (vo) waren. Inmiddels zijn daarvan conceptversies beschikbaar.[2] Veel docenten ervaren momenteel een discrepantie tussen de stof uit de methodes en de opgaven in de toetsen en examens. Methodes werken inmiddels aan nieuwe versies die beter aansluiten.

In nascholingen en tijdens studiedagen en conferenties worden veel vragen gesteld over waar nu eigenlijk de verschillen tussen 2F en 3F uit blijken en wat nu precies tot de verplichte examenstof hoort en wat niet.

We hebben geselecteerde opgaven uit vijf methodes (*Getal & Ruimte*, *Moderne Wiskunde*, *Gecijferd!*, *Deviant* en *Rekenblokken*) voorgelegd aan twee deskundigen die op diverse manieren betrokken zijn bij het rekenonderwijs en de toetsing ervan in vo en mbo: **Monica Wijers** (Freudenthal Instituut) en **Victor Schmidt** (SLO). Zij hebben gekeken naar het niveau (is de opgave volgens hen echt 2F of 3F, en waarom?). Waar mogelijk geven ze tips hoe je de opgave geschikt kunt maken voor het andere niveau. Bovendien is er gekeken naar de aansluiting bij het pilotexamen rekenen (mbo) en de pilotrekentoets voor het vo.

Een algemene opmerking die bij veel opgaven uit de verschillende methodes gemaakt werd, betrof het authentieke karakter van deze opgaven. In een authentiek probleem wordt de situatie geschetst, vaak ook ondersteund met beeld en authentieke bronnen, en vervolgens wordt het probleem/de vraag geformuleerd. In aansluiting bij wat in het referentiekader staat over de niveaus 2F en 3F is in de Rekentoetswijzers en syllabi 2F en 3F is vastgelegd dat in een rekentoets of -examen opdrachten horen met authentieke situaties waarin een probleem wordt gesteld dat met functioneel gebruik van rekenkennis en -vaardigheden kan worden opgelost. In de methodes worden voor de onderwijssituatie geregeld ook andere keuzes gemaakt. Daar zie je bijvoorbeeld dat tabellen vereenvoudigd en gestileerd zijn of dat er onrealistische mooie ronde getallen worden gebruikt. We hebben de opmerkingen die daarover gemaakt zijn, verder weggelaten en laten het bij deze algemene constatering.

Deviant

VS (Victor Schmidt): De opgave in ***figuur 1*** past goed bij niveau 3F. Bij (a) moet een leerling eerst bedenken dat 25 cl gelijk is aan 250 ml en vervolgens concluderen dat er 2,5 × 0,4 g = 1 g broomhexine in de fles zit. Dat zou nog op 2F-niveau kunnen, hoewel aan de moeilijke kant voor 2F. Vraag (b) is erg mooi en past goed bij 3F. Eerst recept goed lezen, dan berekenen dat je 80 × 0,25 mg = 20 mg per keer moet innemen en dan omrekenen naar dosering in ml. Past erg goed bij 3F.

Een 2F-variant van de b-opgave kan luiden: Hoeveel mg broomhexine heeft iemand van 80 kg per keer nodig? Of: hoeveel ml moet iemand innemen die 20 mg broomhexine nodig heeft?

MW (Monica Wijers): Een vraag met twee deelvragen is per definitie meer een sommetje dan een authentiek probleem en past dan ook niet goed bij het functionele karakter van 3F. Toch kijk ik er even met een 3F-blik naar. Ik richt me dan op deelopdracht b. Die typeer ik als een 3F-opdracht. Er zijn relatief veel gegevens en de manier waarop je het probleem moet aanpakken is niet onmiddellijk duidelijk (zeker niet als je vraag a weglaat). De gegevens hangen samen; de deelnemer moet die samenhang begrijpen en gebruiken en er vervolgens in een serie stappen berekeningen mee uitvoeren. Dit combineren van gegevens en berekeningen is kenmerkend voor een 3F opdracht.

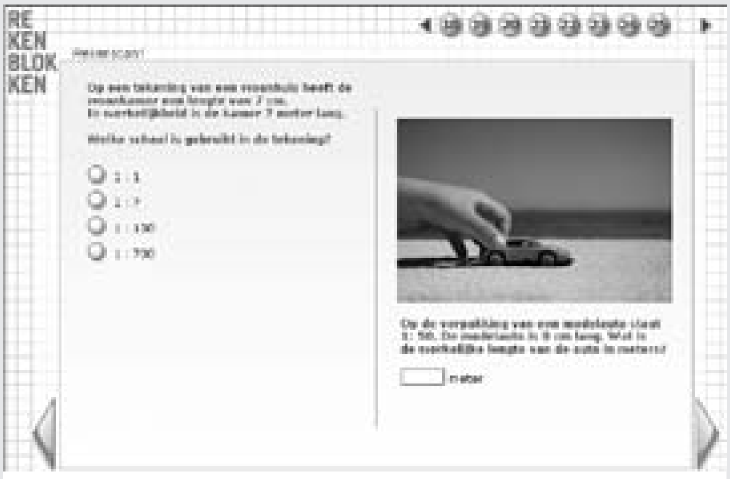
Rekenblokken

MW: Een illustratie van de modelauto ***(zie figuur 2)***, met de afmeting erbij en eventueel ook het doosje waarop de schaal leesbaar is, zou de situatie authentieker neerzetten. Bovendien zou dit een deel van de tekst overbodig maken. Als we daar even doorheen kijken, is dit een vraag passend bij 2F . De situatie is helder en de vraag is eenduidig. Het is duidelijk wat er berekend moet worden en het rekenwerk is beperkt en tamelijk eenvoudig. Dat maakt het een 2F vraag.

VS: Vooral de opgave met de modelauto past goed bij 2F. Van belang is het feit dat de verhouding 1 : 50 'eenvoudig' is. Zou de verhouding bijvoorbeeld 3 : 44 zijn, dan is ze te moeilijk voor 2F én voor 3F. Een



figuur 1 Bewerkingen 3F



figuur 2 Verhoudingen 2F

3F-variant van deze opgave kan bestaan uit twee modelauto's met de vraag hoeveel meter hun lengtes in werkelijkheid verschillen.

Gecijferd!

MW: Deze opgave ***(zie figuur 3)*** bevat erg veel informatie zowel in beeld als in tekst. De situatie is complex, wat duidt op een 3F vraag. De koptekst 'Systematische Probleem Aanpak' wijst er ook op dat dát het is waar in deze situatie omdraait. Het is mijns inziens een opgave die zich goed leent om in een lessituatie door groepjes leerlingen te laten maken. Het maken van een plan en het verdelen van het rekenwerk en het bij elkaar brengen en vergelijken van de verschillende
resultaten kan heel goed in een groep worden uitgevoerd. Dergelijke complexe, authentiek en rijke rekensituaties, zijn erg belangrijk in het onderwijs zeker voor referentieniveau-3F. In een onderwijssituatie kunnen bij het oplossen van dit probleem ook keuzes worden gemaakt en veranwoord: ga je wel tapijttegels gebruiken als er ook ergens staat dat je geen naden wilt in tapijt? Wil je tegels op maat snijden of neem je alleen tegels als het precies past? Dit past bij een authentieke situatie. In een toetssetting zit er niets anders op dan deze overwegingen geen rol te laten spelen en gewoon maar elke optie door te rekenen (wat nog behoorlijk lastig is).
VS: Typische 3F-opgave, want: veel relatief eenvoudige berekeningen, op- en afrondproblematiek, extra complicatie door extra 2 m^2. Een 2F-variant van deze opgave kan zijn: Uitrekenen hoeveel het kost om alleen de woonkamer met tapijt Twinkle te bekleden. Context wordt daardoor eenvoudiger, maar de aard van de opgave blijft min of meer hetzelfde.

Moderne Wiskunde

MW: Echt een wiskundesommetje ***(zie figuur 4)***, met weinig functioneel gebruik van rekenen. Dit komt met name door de vorm van de opdracht. Het zou beter bij 2F passen als alleen de illustratie met het opschrift 'Stand van de ereklasse korfbal' was neergezet als situatie, met daarbij een van de afleesvragen (b of c). Dit lijkt me dan een makkelijke 2F vraag uit het domein verbanden.
VS: Deze opgave past goed in 2F. Het is in de huidige vorm vooral een afleesopgave, maar dat is onderdeel van referentieniveau 2F. Zou er in plaats van V en T alleen het doelsaldo vermeld staan, zoals gebruikelijk bij de competitieoverzichten betaald voetbal, dan krijgt onderdeel c iets extra's, maar komt dan meer in de buurt van 3F. Verder zou op 3F-niveau een vraag gesteld kunnen worden als: Dalto 1 speelt tegen KVS 1. Wanneer wisselen beide korfbalteams van plaats in de competitie? Met een aantal keuzealternatieven: KVS 1 wint van Dalto 1 met 12 – 9, ….

Getal & Ruimte

VS: Dit ***(zie figuur 5)*** is vooral een 3F-opgave omdat er twee bronnen gecombineerd moeten worden. Een 2F-variant zou enkel uit het cirkeldiagram kunnen bestaan. Het aantal verkochte auto's in 2008 zou vervolgens gegeven moeten worden.
MW: Het combineren van gegevens uit verschillende grafische voorstellingen in combinatie met rekenwerk zoals bij deelvraag c. maakt dat een 3F vraag. Of het echt om een authentiek probleem gaat is een beetje de vraag. De gegevens over 2006 zijn immers bekend en het zou meer voor de hand liggen om op basis daarvan het marktaandeel van Frankrijk in 2006 te bepalen dan via de omweg van 2008.

Conclusies

Samenvattend kunnen we stellen dat de methodes over het algemeen, zoals ook te verwachten is, een grotere diversiteit aan opdrachten bevatten dan de toetsen. Methodes bevatten bijvoorbeeld over het algemeen meer kale opgaven dan gezien de toetsing noodzakelijk of zelfs gewenst is. Daarbij moet worden bedacht dat de leerlingen dit type opgaven natuurlijk moeten oefenen. Aan de authenticiteit of het werkelijkheidsnabije karakter van de opgaven is in veel gevallen nog wel wat te verbeteren. Over de kenmerken die een 2F-opgave van een 3F-opgave onderscheiden geeft de syllabus rekenen 2F mbo informatie (***zie kadertekst***). Ook is in deze syllabus een aantal voorbeelden opgenomen, die op beide niveaus zijn uitgewerkt om het verschil aan te geven.



figuur 3 Meten/meetkunde 3F



figuur 4 Verbanden 2F

Uit de syllabus rekenen 2F mbo

Complexiteit van de opgaven – De opgaven voor 2F en 3F verschillen niet zozeer op het gebied van inhoud, maar wel in de mate van complexiteit van de toepassingssituaties en de vraagstelling. Dit is overigens geen 'hard' onderscheid maar een continuüm (glijdende schaal). Factoren die de complexiteit van een opgave bepalen zijn onder andere:

Tekstuele aspecten

- helderheid van het probleem (van duidelijk/expliciet tot verborgen/impliciet);
- extra of ontbrekende informatie (geen of enige extra of ontbrekende informatie);
- het taalniveau van de tekst en de vraagstelling.

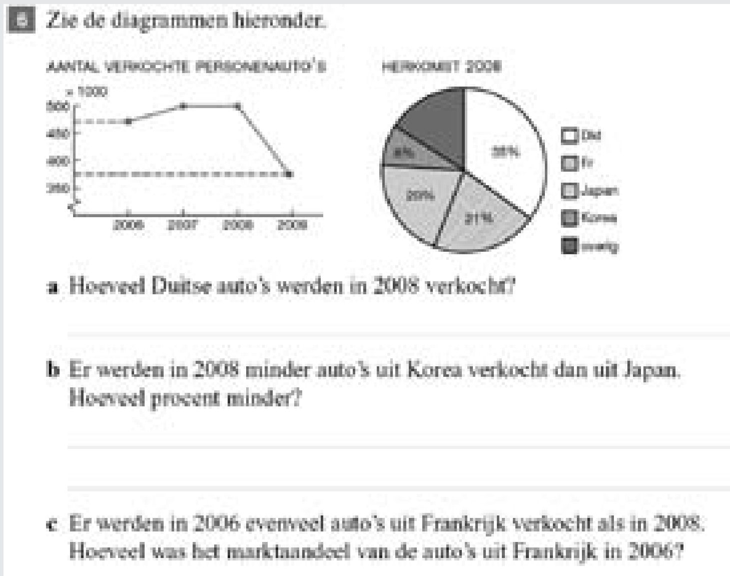
Rekenaspecten

- complexiteit van de numerieke of meetkundige gegevens (van concreet en eenvoudig tot complex waarbij combineren nodig is);
- soort bewerking/vaardigheid (van eenvoudig tot complex);
- verwachte aantal bewerkingen (van een enkele tot verschillende gecombineerd).

Een opgave uit 2F onderscheidt zich bijvoorbeeld van een vergelijkbare opgave uit 3F doordat:

- nagenoeg meteen duidelijk is wat er wordt gevraagd;
- de vertaling van situatie naar een 'model' eenvoudiger is uit te voeren;
- er minder vaak informatie en berekeningen gecombineerd hoeven te worden;
- het oplossen minder stappen vraagt.

Zoals eerder opgemerkt is het geen 'hard' onderscheid en zal niet altijd op alle aspecten het verschil tot uitdrukking komen.



figuur 5 Verbanden 3F

Noten

[1] In dit artikel kunnen we slechts enkele opgaven de revue laten passeren, maar op de websites van *Volgens Bartjens* en *Euclides* zijn nog meer voorbeelden te vinden.

[2] Deze publicaties kunnen worden gedownload via de steunpunten taal en rekenen vo en mbo.

Over de deskundigen

Monica Wijers is onderzoeker en onderwijsontwikkelaar bij het Freudenthal Instituut (FIsme) van de Universiteit Utrecht
Victor Schmidt is projectleider rekenen in vo en mbo bij de SLO.

Sturen op optimale rekenresultaten

REKENEN OP PIUS X

[Bronja Versteeg en Bert van de Wal]

Pius X is een school voor vo in Bladel met praktijkonderwijs, vmbo, havo en vwo. Deze school begon zo'n 5 jaar geleden actief met het versterken van de rekenvaardigheid van de leerlingen. Aanleiding was de brandbrief van een wiskundedocent havo/vwo in de Paperclip, de interne nieuwsbrief van Pius X. De docent constateerde dat het een groot deel van de bovenbouwleerlingen niet lukte om eenvoudige basisvaardigheden toe te passen binnen vakken als wiskunde, natuur- en scheikunde en economie. Naar aanleiding van dit bericht gaf de directie de opdracht om met rekenen aan de slag te gaan.

Denktank rekenen

Een groepje geïnteresseerde docenten van verschillende afdelingen vormden samen de 'denktank rekenen'. Een van de eerste vragen die de denktank zichzelf stelde, was: 'hoe komt het dat de leerlingen bewerkingen zoals de staartdeling niet meer kunnen maken?' Conclusie was dat docenten onvoldoende op de hoogte waren van het rekencurriculum en didactiek van het basisonderwijs. De staartdeling had namelijk plaatsgemaakt voor de staartsom… Om meer grip te krijgen op de rekenlijn van het po werd Mieke van Groenestijn (Hogeschool Utrecht) uitgenodigd. Docenten die binnen hun vakgebied met rekenen te maken hebben, kregen een uitnodiging en hebben studiebijeenkomsten gevolgd.

Rekenvaardigheid onderhouden en verder uitbouwen

In opdracht van de directie heeft de denktank rekenen rekenmateriaal verzameld waarmee doelgericht gewerkt kon worden aan de verbetering van de rekenvaardigheid van de leerlingen. Omdat de onderwijsbehoeften van de leerlingen van de verschillende afdelingen erg uit elkaar liepen, werd gekozen om afdelingsspecifiek materiaal te maken. Uit het materiaal van zowel *De Wereld in Getallen* als *Rekenrijk* (twee basisschoolmethoden) werd een aantal losse rekenkaternen samengesteld. In het schooljaar 2009-2010 werd gestart met de rekenkaternen.

Rekenlessen en rekentijden

In het overzicht ***in figuur 1*** staan de rekentijden door de jaren heen.
In het praktijkonderwijs is het rekenen anders georganiseerd. Rekenvaardigheid komt aan de orde in de methode *Promotie* en het praktijkkatern van *Getal & Ruimte*. In het vierde jaar wordt gebruik gemaakt van *Deviant*.

In de evaluatie van schooljaar 2009-2010 werd geconcludeerd dat de koppeling van rekenen aan de uitvaluren niet optimaal werkte. Het was niet duidelijk wie verantwoordelijk was voor de instructie aan deze leerlingen. Ook het volgen van de resultaten was lastig en verliep niet naar tevredenheid.
In 2010-2011 is overgestapt naar de rekenvaardigheidslijn van de wiskundemethode *Getal & Ruimte*. Over de aansluiting op 2F waren de docenten niet tevreden. Het materiaal sloot onvoldoende aan op het niveau van de leerlingen. De uitgever is aan de slag gegaan met het bijstellen van de materialen.
Ook dit schooljaar wordt gewerkt met de rekenlijn van *Getal & Ruimte*. De rekeninstructie voor de tweede klas vmbo g/t wordt verzorgd door de docenten wiskunde, natuur en techniek, en mens en maatschappij binnen de eigen lesuren. De verwerking vindt plaats in keuzewerktijd. Docenten komen echter in de knel met de planning van 'hun eigen werk', waardoor de rekeninstructies onvoldoende aandacht krijgen.
In schooljaar 2012-2013 zal mogelijk ook in de derde klassen rekeninstructie geïntroduceerd worden. Het is de bedoeling dat het aanbod voor deze groepen gekoppeld wordt aan toetsresultaten zodat de rekeninhoud zoveel mogelijk afgestemd wordt op de onderwijsbehoeften van de leerlingen.

Van denktank naar expertgroep

Met ingang van dit schooljaar is de denktank rekenen overgegaan in de expertgroep rekenen. De oorspronkelijke denktankgroep met bevlogen docenten is aangevuld met collega's uit het middenmanagement en de directeur onderwijs.

De expertgroep rekenen van Pius X bestaat uit:

- voorzitter Bert van de Wal, docent wiskunde en sectievoorzitter wiskunde vmbo;
- de contactpersoon havo/vwo;
- de contactpersoon vmbo;
- de contactpersoon praktijkonderwijs;
- de clusterleider bètavakken havo/vwo;
- de clusterleider bètavakken vmbo;
- de coördinator toetsing;
- de directeur onderwijs.

In de bijeenkomsten van de expertgroep wordt gesproken over de organisatie van het rekenen en de inrichting van het rekenonderwijs: toetsing, voortgang, materiaalgebruik, instructiekwaliteit en de organisatie van het komende schooljaar – wie doet wat?
De expertgroep heeft als taak om de directie te adviseren. De expertgroep komt regelmatig bij elkaar en formuleert voorstellen voor de onderwijswerkgroep.
De onderwijswerkgroep neemt de beslissing om deze adviezen al dan niet door te voeren. De directeur onderwijs maakt deel uit van de onderwijswerkgroep.
De expertgroep heeft geadviseerd voor meer klassen rekenen in het rooster op te nemen. Deze beslissing wordt door de onderwijswerkgroep bekeken vanuit een breder kader, omdat dit gevolgen heeft voor de contacttijd van de andere vakgebieden. Van belang is te bepalen wat nodig is voor de verschillende groepen leerlingen om de voorgeschreven referentieniveaus te halen.

	vmbo basis/kader	vmbo gemengd/theoretisch	havo/vwo
2009-2010	1e klas: 1 uur per week	1e klas: 1 uur per week	1e klas: tijdens uitvaluren
2010-2011	1e klas: 1 uur per week	1e klas: 1 uur per week	1e klas: 1 uur in één trimester (13 uur).
2011-2012	1e en 2e klas 1 uur per week	1e klas: 1 uur per week 2e klas: instructie tijdens bètavakken: verwerking tijdens kwt	1e klas: 1 uur in één trimester (13 uur).
2012-2013	1e en 2e klas 1 uur per week	1e klas: 1 uur per week 2e klas: 1 uur per week	1e, 2e en 3e klas: 1 uur in één trimester (13 uur).
Advies expertgroep	bovenbouw: 1 uur per week	bovenbouw: per trimester toetsen en onderhouden uitvallers: 1 uur per week	bovenbouw: per trimester toetsen en onderhouden uitvallers: 1 uur per week

figuur 1 Tijd besteed aan rekenen per cursusjaar

Deze keuzes worden genomen vanuit het rekenbeleid en strategisch beleid van de school.

Beredeneerd aanbod en afstemming

Er zijn grote verschillen in rekenvaardigheid tussen leerlingen. Leerlingen van alle afdelingen kunnen een rekenachterstand of ernstige rekenproblemen ontwikkelen. Het onderwijskundig rapport en het formulier 'warme overdracht' aangevuld met specifieke rekengegevens, geven informatie over de rekenvaardigheid van leerlingen bij binnenkomst.

De kernteamleiders van Pius X gebruiken de gegevens van groep 8 om de onderwijsbehoeften van de leerlingen in kaart te brengen. Kinderen met ernstige rekenproblemen of dyscalculie worden opgenomen in de klassenplattegrond zodat alle docenten daarvan op de hoogte zijn.

Om het rekenaanbod beter af te stemmen op de onderwijsbehoeften van de leerlingen wil de expertgroep de rekentoetsgegevens (drie so's en één proefwerk per periode) gebruiken om keuzes te maken binnen het aanbod. Dit geldt zeker ook voor de leerlingen die in 2014 rekenen als examenonderdeel hebben. Vmbo g/t-, en havo/vwo-leerlingen die de toets voldoende hebben gemaakt, kunnen hun rekenvaardigheid zelf bijhouden. Hoe hoger de afdeling, hoe meer we moeten en kunnen verwachten dat kinderen hun rekenvaardigheid zelf onderhouden. Structurele instructie heeft een positief effect voor de leerlingen die zijn uitgevallen.

De afgelopen periode heeft de school zich georiënteerd op aanvullende rekenprogramma's die ingezet zouden kunnen worden. ICT-toepassingen die leerlingen op het werkplein op school en op de computer thuis kunnen inzetten, zouden hier het beste bij aansluiten. Voor de klassen waarvoor structureel een uur rekentijd is ingeroosterd zouden flexibele afspraken met leerlingen gemaakt kunnen worden naar aanleiding van resultaten op de toets. De docent is dan verantwoordelijk voor deze afstemming. Voor de vmbo-basis leerlingen is wel duidelijk dat ze de contacturen met de docent vrijwel allemaal nodig hebben om de rekenvaardigheid op niveau te houden.

Belangrijke vragen die in dit kader beantwoord moeten worden zijn: wat is de rekeninhoud van de verschillende perioden, hoe normeren we de toetsen en wat verstaan we nu precies onder het 2F-niveau? Deze vragen passen in het rekenbeleidsplan en worden in de expertgroep rekenen afgestemd.

RT rekenen in het vo

Naar aanleiding van de gegevens uit de warme overdracht en de resultaten van de so's en de proefwerken worden zwakke rekenaars zo snel mogelijk geselecteerd voor remedial teaching (RT). Welke leerlingen in aanmerking komen, bepaalt de coördinator RT. Hij verzamelt en interpreteert de rekenresultaten. Daarnaast is er het signaal van de rekendocent.

Met name in de basisberoepsgerichte leerweg zijn er leerlingen die opvallend lage scores op de Cito-eindtoets behaald hebben. Hun rekenvaardigheid ligt soms op het niveau van groep 5 van het basisonderwijs. Binnen de school is het lastig om geschikt materiaal voor deze groep leerlingen te vinden. Met de invoering van de referentieniveaus zal het voor deze leerlingen zeer moeilijk worden om op de rekentoets een voldoende te scoren en dus uiteindelijk te slagen.

Professionalisering van docenten

Rekenuren worden zoals gezegd ingevuld door verschillende docenten. Om de kwaliteit van de rekeninstructies te waarborgen, worden de rekenlessen geëvalueerd. Zo wordt bijvoorbeeld besproken welke eindalgoritmen voor de verschillende afdelingen aangehouden worden en op welke manier hier naartoe gewerkt wordt (komen tot verkorting) of wordt besproken welke concrete materialen (zoals breukenstroken of breukstokken) de vmbo leerlingen zouden kunnen ondersteunen bij het gelijknamig maken van breuken.

De Rekenbrug, de doorgaande lijn

De expertgroep rekenen is ambitieus en heeft een drive om steeds verder te verbeteren. Vanuit deze ambitie is De Rekenbrug ontstaan. De Rekenbrug is sinds 2009 een platform om samen met

leerkrachten po van Stichting KempenKind de rekeninhoud en didactiek te verdiepen en op elkaar af te stemmen in doorgaande leerlijnen van po naar vo. Door de rekenwerkgroep (met leerkrachten en IB-ers po en docenten vo) worden per leerjaar 2 bijeenkomsten voorbereid. Ze worden daarbij ondersteund door een rekenadviseur van Giralis Groep. Thema's als rekendidactiek, de referentieniveaus, het protocol ERWD, het onderwijskundig rapport en de warme overdracht zijn onder de loep genomen. Op dit moment wordt een document gemaakt met de oplossingsstrategieën die in groep 7 en 8 en in de eerste twee jaren van het vo gebruikt worden. *Procenten, hoe doen we dat in groep 7, 8, bij wiskunde en bij economie?* Er wordt naar een situatie toegewerkt waarin strategieën zoveel mogelijk eenduidig aangeboden worden. Dit geeft een doorgaande rekenlijn binnen de school, maar ook daarbuiten. De doorgaande lijn is een belangrijke voorwaarde om tot optimale rekenresultaten te komen.

Succesfactoren

- Haal bij de warme overdracht rekeninhoudelijke informatie op over leerlingen met specifieke onderwijsbehoeften (wat heeft de school gedaan?) zodat deze leerlingen meteen in aanmerking komen voor extra begeleiding en docenten weten waar ze op aan kunnen sluiten.
- Bouw in het rooster rekeninstructietijd in.
- Onderhoud vanaf de eerste week en in alle leerjaren structureel de kennis en vaardigheden die de leerlingen in het po of het voorafgaande jaar hebben opgebouwd.
- Wijs gericht docenten aan die de rekenlessen voor hun rekening nemen, zodat met deze groep docenten een verdieping in het rekenonderwijs kan plaatsvinden (didactiek, doelen, referentieniveaus en doorgaande leerlijnen).
- Investeer in docentvaardigheden.
- Maak docenten verantwoordelijk voor het rekenonderwijs (en de resultaten) aan bepaalde groepen.
- Analyseer toetsgegevens zodat actie ondernomen kan worden bij leerlingen die onvoldoende resultaten halen.
- Stem het aanbod af op wat de leerlingen wel en niet kunnen. Kinderen die de pre-toets voldoende scoren hoeven niet mee te doen met de instructies.
- Gebruik ICT-toepassingen zodat leerlingen ook flexibel op school en thuis kunnen onderhouden en oefenen.

Over de auteurs

Bronja Versteeg is onderwijsadviseur rekenen-wiskunde bij Giralis Groep en projectleider van De Rekenbrug.
Bert van de Wal is voorzitter van de expertgroep rekenen van Pius X.

Rekenen op je mobieltje

REKENMACHINES IN HET ONDERWIJS

[Jurriaan Steen]

Onlangs hebben wij een wasmachine en een wasdroger gekocht. Na enkele weken zouden de machines op ons thuisadres worden afgeleverd. Niet dat we hier nu vol spanning naar uitkeken, maar we waren blij dat we weer konden wassen zonder al te veel herrie.
Toen de machines uitgeladen werden bleek dat de toestand van de wasdroger, zoals deze uit de verpakking kwam niet in orde was. Aan de zijkant was een behoorlijke deuk te zien. En nee, deze wilden wij niet. ‘Deze machine gaat terug en u betaalt alleen de wasmachine. De afrekening voor de droger komt de volgende keer’, was de reactie van de chauffeur.
Thuis aan de keukentafel werd de rekening erbij gepakt en het bedrag van alleen de wasmachine moest uitgerekend worden. Met enige beroepsdeformatie vroeg ik me af hoe deze jongeman dat zou uitrekenen. Als ‘rekenman’ ben ik altijd benieuwd hoe er in de praktijk gerekend wordt. Zou hij gaan cijferen of kan hij het met het hoofd? Inmiddels had ik het zelf ook uitgerekend, bang dat hij mij door een rekenfout teveel zou laten betalen.



Uit zijn binnenzak pakte hij zijn mobieltje en rekende perfect uit wat ik moest betalen. Ik was er zelf niet opgekomen, maar dat kan natuurlijk ook. Gewoon je mobieltje pakken en het uitrekenen. En ik vroeg me meteen af wat we hier mee kunnen in het onderwijs. Leren wij de leerlingen dat zij alles kunnen uitrekenen met pen en papier, of dat zij wellicht alles uit het hoofd moeten uitrekenen? Wanneer je de discussies op internet volgt is er een aantal deskundigen die dat verplicht wil stellen. Daarnaast is er een groep die de leerlingen wil opvoeden om op een juiste manier om te gaan met de rekenmachine c.q. mobieltje. Tot die laatste groep behoor ik.
Natuurlijk vind ik ook dat een leerling van het vo of mbo de tafels moet kennen. En zonder pardon een aftreksom van bijvoorbeeld 387 – 138 uit moet kunnen rekenen. Maar, je zal het maar niet kunnen. Laten we zo iemand in de steek? Geven we hem de opdracht om maar bladzijden vol met kale sommen te oefenen of leren wij hem om te gaan met zijn ‘reken-beperkingen’. Mijn voorkeur zou zijn om deze persoon (en misschien wel de gehele schoolgaande populatie) te leren rekenen met mobieltje of rekenmachine. Dat moet dan goed onderwezen worden. Optel- en aftreksommen tot 100 moeten redelijk beheerst worden. Tussenoplossingen moeten nauwgezet worden opgeschreven.
Dan komt de vraag of de rekenregels wel gelden op het mobieltje of de rekenmachine. Aan de hand van een eenvoudige opgave als 12 + 4 × 2 kan men de rekenregels op zijn eigen mobieltje controleren. En dan is het natuurlijk een kwestie van onderwijs om leerlingen te laten zien dat er verschillende uitkomsten mogelijk zijn, afhankelijk van de gebruikte rekenmachine. De verwondering die hierover in een les kan ontstaan, is dan een mooi aanknopingspunt. Leer de leerling om breukensommen als optel- en deelsommen te zien. Dat het berekenen van 15% korting hetzelfde is als een vermenigvuldigsom. Wij, docenten en opleiders, moeten meer tijd investeren om de leerlingen het ‘getalgevoel’ te laten krijgen. Door steeds vanuit een betekenisvolle situatie te starten, leer je de leerlingen in verschillende situaties te rekenen. Dan is het toch geen probleem dat de chauffeur gewoon zijn mobieltje pakt om het uit te rekenen?
Jammer genoeg mag het mobieltje niet gebruikt worden bij het rekenexamen. Daarvoor zou het goed zijn dat de rekenmachine, die gehanteerd wordt in het examenprogramma (Examentester van het Cito), openbaar wordt, zodat men daarmee kan oefenen.

Over de auteur
Jurriaan Steen is opleidingsdocent rekenen/wiskunde en onderwijskunde aan de pabo te Ede. Tevens is hij zelfstandig trainer/adviseur en coördinator netwerk rekenen van het Steunpunt Taal & Rekenen mbo (*www.steunpunttaalenrekenenmbo.nl*).

Anders dan de rekenles

APOTHEKERSASSISTENTEN DOEN HET PILOTEXAMEN REKENEN 3F

[Rianne Reichardt en Frank Haacke]

Tijdens het pilotexamen rekenen 3F werden deelnemers geconfronteerd met complexe opgaven en enkele hinderlijke storingen in het computerprogramma. Frank Haacke was aanwezig bij een van de examens en doet verslag.

Achtergrondinfo
Bij het ROC Eindhoven zijn in totaal 1730 (pre-)pilotexamens afgenomen (465 taal en 465 rekenen, niveau 2F en 400 examens Nederlands en 400 examens rekenen niveau 3F), verdeeld over 5 opleidingsclusters. Per cluster is één toetsleider aangesteld, die verantwoordelijk is voor de totale organisatie rondom de (pilot)examinering. Hiervoor is een taakomschrijving gemaakt met bijbehorend draaiboek. De toetsleiders hebben een interne opleiding gehad in het gebruik van het programma Examentester. Tijdens de pilotexamens is gebruik gemaakt van het netwerk van oud-docenten die een training hebben gekregen in het surveilleren, specifiek in het kader van de digitale centrale examinering. Voor hen en voor de toetsleider is ook een heel duidelijke instructie op papier gezet.
Er waren twee examenlocaties. Bij elk examen waren één toetsleider en twee surveillanten aanwezig.
Voor het inlezen van de kandidaatgegevens is binnen ROC Eindhoven een Excel-bestand gemaakt, waarmee de kandidaatgegevens van *Peoplesoft* rechtstreeks in ‘testmanager’ kunnen worden geïmporteerd. Dit werkt erg goed.
Tijdens één van de examens is een filmpje opgenomen, waarin Frank Haacke, projectleider taal en rekenen bij ROC Eindhoven, en Jan Paul de Vries, projectleider COE bij het College voor Examens, over hun ervaringen met en het nut van deze pilot vertellen. Dit filmpje is te bekijken op: *www.youtube.com/watch?v=1l1IyL2QFdI*

Voorbereiding

Donderdagochtend 26 januari 11:15 uur. Bij ROC Eindhoven verzamelen de studenten van de mbo 4-opleiding Apothekersassistent zich bij het examenlokaal. Vandaag doen ze mee met het pilotexamen rekenen op niveau 3F. De opleiding gebruikt dit pilotexamen als instellingsexamen rekenen. De studenten krijgen een certificaat als ze het examen met een voldoende afsluiten. En dat is een welkome aanvulling op hun cv.
Alle 23 studenten melden zich in het voorportaal van het lokaal en identificeren zich met hun i-card. Twee weken voor het pilotexamen hebben alle deelnemers een brief ontvangen waarin de voorwaarden voor deelname aan het examen duidelijk omschreven stonden. In deze brief zijn ze er onder andere op gewezen dat ze zonder hun i-card niet mee mogen doen met het examen. Jassen, tassen en mobieltjes gaan in speciaal hiervoor aangeschafte lockers. De deelnemers zetten hun handtekening bij hun naam op het presentieformulier.

Organisatie

Tussen de computers staan schotjes. Ze mogen de computer nog niet aanraken. Eerst krijgen de kandidaten instructie van de toetsleider. Als ze allemaal zitten, met hun rug naar de computers en met hun gezicht naar de toetsleider, wordt hun verteld wat ze kunnen verwachten en hoe zij storingen kunnen voorkomen. De studenten krijgen twee uur de tijd voor het examen. Het opstarten gaat volgens de instructie die bij de computer ligt. Ieder krijgt een andere versie van het examen, dus bij je buurvrouw of -man kijken heeft weinig zin. Ook is het mogelijk dat er zich problemen voordoen. ‘Doe dan vooral niets zelf, maar waarschuw één van de drie aanwezige surveillanten. Dan komt het allemaal goed.’
11:32 uur – De toetsleider wenst iedereen heel veel succes en geeft aan dat ze tot 13:32 uur de tijd hebben. Alleen de ene dyslectische studente in deze groep mag er een half uur langer over doen.
Ondertussen zijn de studenten heel geconcentreerd bezig met de eerste opgaven, die nog zonder rekenmachine beantwoord moeten worden. Er is kladpapier en een pen klaargelegd en er wordt driftig geschreven. Na de eerste zes sommen mag worden gebruik gemaakt van de rekenmachine. Opvallend is dat de studenten geen enkele moeite hebben met het digitale karakter van het examen. Ze weten meteen hoe ze de digitale rekenmachine kunnen gebruiken. Ook de manier van scrollen, vergroten van de afbeeldingen, het invullen van het antwoord, is geen enkel probleem voor ze. Na een half uur gaat één van de surveillanten bij alle studenten langs om de namen op het beeldscherm te vergelijken met de gegevens op hun i-card. Dit om fraude te voorkomen.

Storingen

Bij eerdere examens zijn er storingen met de software *Examentester* geweest. Om deze storingen te voorkomen is er een duidelijke instructie voor studenten en surveillanten gemaakt. Al na zo’n 3 minuten gaat de eerste vinger omhoog. De tekst ‘Run time error’ verschijnt op het scherm van dit meisje. De surveillanten, gerekruteerd uit het oud-docenten-netwerk, zijn hierop goed voorbereid. Zij weten precies hoe ze deze storing op moeten lossen. Dit gaat gelukkig ook heel vlot, want in de daaropvolgende 10 minuten zal dit nog zo’n tien keer voorkomen.
Een vinger gaat wat aarzelend omhoog. ‘Ik heb vast iets stoms gedaan, maar ik kan niet verder.’ Op het scherm verschijnt de tekst: ‘kan voortgang niet opslaan’. De surveillant stelt de student gerust. Het is niet haar fout en ze kan zo meteen gewoon weer verder.

Wel moet het examen opnieuw geladen worden, wat een kleine 5 minuten kost. De studente gaat hierna weer geconcentreerd verder. Ook dit probleem herhaalt zich een aantal keren, maar wordt steeds weer soepel opgelost.
Eén keer gebeurt er iets waardoor het examen helemaal wordt afgesloten. Maar ook hier was men op voorbereid. Er is één (personeels)-computer waarop 'Examentester ' is geïnstalleerd. Hierdoor kan de toetsleider meteen het examen opnieuw klaarzetten, zodat ook dit probleem weer opgelost wordt. Na even overleg wordt besloten om twee pechvogels tien minuten extra tijd te geven, vanwege herhaalde storingen. De ICT-afdeling van ROC Eindhoven, die bij alle examens stand-by staat, hoeft niet geraadpleegd te worden. Alle storingen en oplossingen worden genoteerd op het door ROC Eindhoven ontwikkelde formulier 'Proces-verbaal Afname'. Dit proces-verbaal kan door de inspectie gebruikt worden bij het toezicht op de afname van de Centraal Ontwikkelde Examens (COE's).

Ervaringen

De studenten hebben het zichtbaar moeilijk met het examen. Hier en daar wordt nogal gezucht en gesteund. Eén meisje heeft niet genoeg aan het klaargelegde kladpapier en vraagt of ze alsjeblieft nog een blaadje mag. Op een enkeling na is niemand voortijdig klaar met het examen.
13:32 uur – Tijd om te stoppen. De studenten sluiten het examen af. Ze leveren hun kladpapier in, halen de spullen uit hun lockers, zetten hun paraaf met de tijd van vertrek op het presentieformulier en leveren hun lockersleutel in. De toetsleider heeft ondertussen het examen in 'Testmanager' afgesloten en de data retour gezonden naar het Cito.

En dan komen de reacties los:

- Zo, dat was móéilijk…
- Ik dacht dat ik goed was in rekenen, maar dit heb ik echt niet goed gemaakt…
- Het is wel heel anders dan het rekenen dat wij geleerd hebben in de rekenlessen…
- Het leek meer op een taalexamen. Sommige vragen snapte ik echt niet.
- Ik vond het wel erg veel leeswerk, maar ik geloof dat ik ook wel wat dingen goed heb.

Enkele docenten uit de ROC-brede werkgroep rekenen en de projectleider rekenen hebben het pilotexamen ook gemaakt. Ook zij hebben er bijna twee uur voor nodig gehad en vonden het examen te moeilijk. Vooral de complexiteit van de opgaven was groot, waardoor studenten, door op één aspect de fout in te gaan, niet meer op het goede antwoord zouden kunnen komen. Er moesten veel deelvragen beantwoord worden om tot het eindantwoord te komen. Er werd bovendien een te groot beroep gedaan op de taalvaardigheid. Ook was er commentaar op de lay-out. Met name op de rekenmachine die telkens op de plaats kwam van de vraag in beeld. De docenten vragen zich af of de gebruikte lesmethode wel goed genoeg voorbereidt op het functionele aspect van de examenopgaven. De hoop is dat de uitgevers ook het examen bestuderen en hun methodes daarop snel gaan aanpassen. Nu is het nog een proefexamen, maar over ruim een jaar (vanaf schooljaar 2013/2014) telt het al mee voor het diploma.

Resultaten

Enkele weken later komen de resultaten binnen. ROC Eindhoven scoort hoger dan het landelijk gemiddelde en dat geeft een positief gevoel. Jammer genoeg scoort 75% van de studenten een 5 of lager voor het 3F-rekenexamen. Natuurlijk moet in aanmerking genomen worden dat deze groep een veel kortere voorbereidingstijd op het examen heeft gehad dan in de toekomst het geval zal zijn. Echter, naar de mening van de projectleider en de docenten was het rekenexamen 3F veel te moeilijk en dat zou een negatief effect kunnen hebben op de motivatie van studenten én docenten.

Over de auteurs

Rianne Reichardt is adviseur bij het Steunpunt taal en rekenen mbo.
Frank Haacke is projectleider taal en rekenen bij ROC Eindhoven.

Ei van Columbus

[Jos van den Bergh / illustraties: Marjolijn Brouwer]

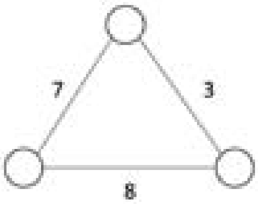
Eerlijk delen *
Vier vaders en vier zoons winnen samen een prijs van € 600.000. Nadat ze dit bedrag eerlijk hebben verdeeld, gaan ze ieder met € 125.000 tevreden naar huis. Hoe kan dat?

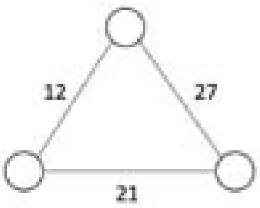
De miljonair *

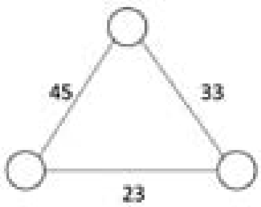


Een journalist vroeg aan een bankdirecteur: 'Verdient u ook een miljoen per jaar?'
'Ik verdien ongeveer 1 euro per minuut', zei de directeur, 'dus rekent u het zelf maar uit.'

Driehoekssommen *
De getallen bij de lijnen geven aan wat de som van de onzichtbare getallen in de cirkels is.







Vul zelf de getallen in de cirkels in.

Leeftijden *
Vader is drie keer zo oud als zijn dochter. Kan hij over 5 jaar twee keer zo oud zijn als zij is?

Hoe oud is opa? *
Opa Karel beweert dat hij, zijn dochter Kitty en haar zoon Kevin, samen 100 jaar zijn. Kitty is 24 jaar jonger dan Karel en 35 jaar ouder dan Kevin.
Hoe oud is iedereen?

Tovervierkant **
In dit tovervierkant is, zoals gebruikelijk, de som van de getallen zowel verticaal als horizontaal als diagonaal steeds hetzelfde.

		7
?		
	10	3

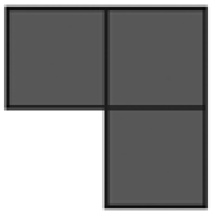
Beredeneer welk getal op de plek van het vraagteken moet staan? En als je dat eenmaal weet, kun je de rest natuurlijk ook invullen.

Mooie droom **
Je ligt na een drukke dag lekker in je bed te slapen en je droomt de volgende droom: je krijgt de opdracht om bomen te planten in de tuin van de koning.



Er moeten 4 rijen van 3 bomen komen. Je wilt bij een boomkwekerij 12 bomen bestellen, maar dat vindt de koning veel te duur. Je moet vier rijen van drie bomen maken en daarbij zo min mogelijk bomen gebruiken. Zou jij de opdracht kunnen uitvoeren met minder dan 12 bomen? Als je het met 6 bomen nog voor elkaar kunt krijgen, mag je met de dochter van de koning trouwen, dus doe je best!

Puzzelstukjes **



Jos moet een vierkant leggen van een aantal puzzelstukjes zoals hierboven. Ze mogen niet op elkaar liggen.
Hoeveel puzzelstukjes heeft Jos minstens nodig?

Lettersom **
Je weet het nog wel, hè. Iedere letter vervang je door een cijfer. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers.

```
  AAA
  BBB
  CCC+
 ----
 BAAC
```

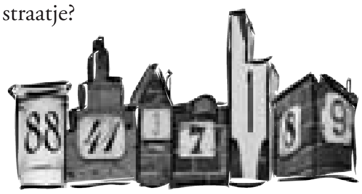
Overal ogen **
Ruud gooit 5 dobbelstenen tegelijk. Hij heeft in het totaal 19 ogen gegooid.
Wat is het totaal van de ogen aan de onderzijde?

Taartprobleem ***
Als je een taart zou verdelen zoals in onderstaande afbeelding, dan ontstaan er vier stukken.

Maar zijn die stukken ook allemaal even groot? Hoe weet je dat zo zeker?

Huisnummers ***
Ik woon in een mooi klein straatje. Laatst ontdekte ik iets. Als ik de nummers die kleiner zijn dan mijn huisnummer, bij elkaar optel, dan is dat precies evenveel als de som van alle nummers die gróter zijn

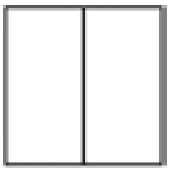
dan het mijne. Op welk nummer woon ik en wat is het hoogste nummer in m'n straatje?



Mijn vriend aan wie ik dit probleem voorlegde zei: 'Hé, da's ook toevallig, dat geldt ook voor mijn huisnummer, maar jij en ik hebben niet hetzelfde huisnummer!' Weet jij hoe lang het straatje van mijn vriend is en op welk nummer hij woont?

Omtrek vierkant ***

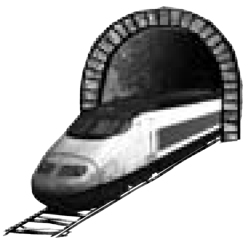
Onderstaand vierkant is door een lijn verdeeld in twee gelijke rechthoeken.



De omtrek van elk van de rechthoeken is 30 cm.
Hoe groot is de oppervlakte van het hele vierkant?

Snelle trein ****

Een trein met een totale lengte van 500 meter rijdt met een snelheid van 150 km/uur een 2 kilometer lange tunnel in.



Na hoeveel minuten is de hele trein weer uit de tunnel?

Volle trein ****

Laatst zat ik in de trein naar Utrecht. Het was zo druk dat 10% van de reizigers moest staan, omdat alle zitplaatsen bezet waren. In Utrecht nam het aantal reizigers toe met 20%.
Hoeveel procent van de reizigers had nu geen zitplaats?

Weegprobleem ***

Je hebt 9 zakjes met oude munten. Alle munten zien er hetzelfde uit en ook de zakjes zijn op het oog hetzelfde. De munten in 8 zakjes wegen allemaal 10 gram per stuk. In het negende zakje zitten valse munten, die wegen allemaal 11 gram per stuk. In elk zakje zitten minstens 9 munten. Verder heb je een gevoelige digitale weegschaal. Je mag één keer iets op de weegschaal leggen en dat wegen; dan moet je precies kunnen zeggen in welk zakje de valse munten zitten. Hoe doe je dat?

Onmogelijke opdracht ***

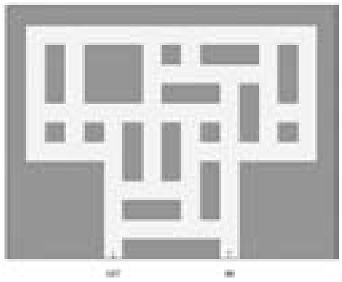
Omdat de rechter het ook niet meer weet, krijgt de verdachte de volgende keus voorgelegd. Uit een zakje met daarin een zwarte en een witte steen moet hij er willekeurig één kiezen. Is de steen wit dan is hij vrij, maar is de steen zwart dan wacht hem een vreselijke straf. Hij ziet toevallig dat de zaalwachter, belast met de uitvoering van dit vonnis, stiekem twee zwarte stenen in het zakje doet. De verdachte denkt diep na en doet een greep in de zak. Vervolgens doet hij iets waardoor hij de vrijheid verkrijgt.
Wat heeft de slimmerik volgens jou gedaan om te zorgen dat ie vrijkwam?

Zakrekenmachine ***

Op mijn zakrekenmachine heb ik een deelsom ingetypt. In het venster komt het volgende getal:
`7.727272727`
Welke deelsom kan ik ingetoetst hebben?

Doolhof rechtsaf ****

In het doolhof hieronder is het niet makkelijk om te verdwalen. Maar kun je ook de weg naar de uitgang vinden als je alleen maar **rechtsaf** mag?



Cijfers tellen ****

Lees goed wat in het onderstaande vierkant staat.

> Binnen dit vierkant
> komt het cijfer 2
> precies 2 keer voor
> en komt het cijfer 3
> precies 1 keer voor

Dat klopt toch, nietwaar? Er staat twee keer een 2 en één keer een 3.
Vul nu op onderstaande stippeltjes de juiste aantallen in. Pas op, want het is veel lastiger dan je denkt!

> Binnen deze rechthoek komt:
> Het cijfer 1 precies .... keer voor;
> Het cijfer 2 precies .... keer voor;
> Het cijfer 3 precies .... keer voor;
> Het cijfer 4 precies .... keer voor.

Vaardig rekenen voor niks

WEBSITES MET OEFENPROGRAMMA'S REKENEN

[Sabine Lit en Martine den Engelsen]

Rekenvaardigheid moet je onderhouden. Drie oefenprogramma's 'Beter Rekenen', 'RekenAPK' en 'Rekenbeter' (in alfabetische volgorde) bieden gratis oefenstof via internet. De auteurs van dit artikel geven een beschrijving van de programma's en een korte vergelijking.

BeterRekenen.nl

De website *Beterrekenen.nl*, gestart in 2010 in samenwerking met Noordhoff Uitgevers, is 'voor iedereen die problemen heeft bij het dagelijkse rekenen. Rekenen zonder elektronische hulpmiddelen is vaak best simpel, als je het handig aanpakt. Daar wil Beterrekenen.nl graag bij helpen.' Het concept van een dagelijkse test van vier vragen is voortgekomen uit Beter Spellen: een ontwerp van Martin van Toll.

Bij je eerste bezoek moet je je aanmelden. Die aanmelding wordt gebruikt om je dagelijks een email te sturen, die je naar de dagelijkse test leidt. Ook worden je scores bewaard. Je kunt zelf kiezen om te oefenen op niveau 1F, 2F of 3F volgens de referentieniveaus van de commissie-Meijerink. De site heeft rond 35.000 actieve gebruikers. Ruim 2300 leerlingen van de bovenbouw basisschool oefenen op niveau 1F. Op niveau 2F oefenen ongeveer 3200 leerlingen vmbo, 2800 mbo-ers, ruim 1500 docenten basisonderwijs en nog 10.500 anderen. Op niveau 3F zijn 3300 studenten mbo-niveau 4 actief, 2700 leerlingen havo/vwo, 1100 hbo-studenten, 500 wo-studenten en 2600 docenten. De redactie antwoordt ons: 'Uit reacties maken we op dat de test soms op school, zelfs klassikaal gedaan wordt, maar ook vaak als huiswerk thuis of onderweg.'

App en mobiele versie – Sinds 4 september 2011 is de rekenapp 'BeterRekenen' voor €1,59 te koop in de Appstore. Met deze iPhone app (binnenkort komt er ook een app voor Android en Blackberry) kan de dagelijkse test nog sneller worden ingevuld. De app is met opzet zo kaal mogelijk gehouden: de dagelijkse test kan worden gespeeld en het resultaat ervan met korte uitleg worden gelezen; voor andere zaken is er een link naar de website.

RekenAPK.nl



RekenAPK is een educatieve game met als thema REKENEN, een initiatief van RepSite.

Hoe werkt RekenAPK?

Je logt in op de site + Een kladblaadje, prima! Geen rekenmachine. + Vraag uitleg als het nodig is! + Kom regelmatig terug naar deze site.

=

Je rekenvaardigheid gaat zeker vooruit!

RekenAPK bestaat uit 100 levels. Level 20 komt overeen met referentieniveau 1F, level 30 met 2F en level 60 met 3F. Een level bevat 20 opgaven. Je registreert je de eerste keer en dan onthoudt het programma je prestaties. De titel APK verwijst naar de onderhoudsvoorwaarde: leerlingen gaan één level terug als ze 10 dagen niet inloggen. Scholen kunnen zich abonneren op RekenAPK en krijgen dan informatie over de voortgang en de oefendiscipline van hun leerlingen. In de afgelopen anderhalf jaar hebben ruim 26.000 spelers een account aangemaakt. Daaronder zijn 8500 leerlingen op 45 scholen die hun rekenvaardigheid regelmatig onderhouden. Dit zijn vooral leerlingen vo, de primaire doelgroep, maar ook enkele groepen 8 van de basisschool en enkele mbo-groepen. Docenten introduceren de rekengame meestal op school en laten het daarna over aan de leerlingen om hiermee thuis te oefenen.

Leerlingen krijgen geen uitleg bij gemaakte fouten: 'De leerling is zelf verantwoordelijk voor zijn progressie. Hij of zij krijgt de juiste antwoorden niet voorgeschoteld, maar moet actief worden om het rekenprobleem zelf te tackelen of om hulp te vragen. Wij vinden het prachtig te zien dat ouders in dat proces worden betrokken.'

Mobiele mogelijkheden – RekenAPK heeft geen app. De website is wel mobiel bereikbaar, maar heeft een Flash player nodig. RekenAPK kan wel gespeeld worden op de iPad, maar heel soepel werkt het niet.

Rekenbeter.nl

De grootste rekensite van Nederland, volgens het openingsscherm van *Rekenbeter.nl*, maar met ruim 33.000 zijn het er net iets minder dan bij Beter Rekenen. 'Meld je aan en ontvang elke dag vier rekensommen. Drie oefensommen en een som om over na te denken.' Rekenbeter.nl is onderdeel van Educatieve Adviezen Kemme bv. en wordt ondersteund door uitgeverij Malmberg. Rekenbeter.nl heeft als doel om de rekenvaardigheid in Nederland te verbeteren. Elke dag vier nieuwe, actuele sommen op niveau 1F, 2F of 3F. Je krijgt automatisch het niveau dat je aankunt. Gekozen is voor een combinatie van 'kale' opgaven en opgaven binnen een context. Bij sommige opgaven helpt handig rekenen je, soms kun je schatten en soms moet je cijferen. Alle rekendomeinen komen aan bod.

De betere en fanatiekere rekenaars krijgen van tijd tot tijd een beloning in de vorm

van een ‘sticker’. Er is een sticker met een professorenmuts als je weinig fouten maakt en een straaljager voor snelle rekenaars. Een sticker met een ‘vroege vogel’ voor wie de sommen voor 7 uur ’s ochtends al af heeft en een ‘kuddedier’ voor iemand die een ander aanmeldt via Twitter. Tot slot geeft Rekenbeter.nl een klassement met de 500 beste rekenaars van de week.
App – De app ‘Rekenbeter’ bestaat alleen in de Android market. De mobiele versie van de website is bereikbaar via de dagelijkse mail op de Smartphone.

Vergelijking

Met relevante en gevarieerde opgaven zijn alle drie de sites geschikt om de rekenvaardigheid te trainen. RekenAPK biedt relatief veel kale opgaven. Deze site richt zich met registratiemogelijkheden voor docenten ook nadrukkelijk op vo-scholen. Opvallend is dat juist RekenAPK de minste uitleg geeft. Beter Rekenen en Rekenbeter.nl richten zich op een breder publiek, binnen en buiten het onderwijs. Rekenbeter.nl biedt met de dagelijkse ‘doordenker’ meer uitdaging voor degenen die echt plezier hebben in dit vak.
Beter Rekenen biedt de vier opgaven in één beeld tegelijk aan, zodat je zelf kunt bepalen in welke volgorde je ze maakt en je antwoorden zelf nog een keer kunt nakijken. Dat kan niet bij de andere sites, die de opgaven een voor een aanbieden. Rekenbeter.nl is de enige site die je stimuleert om vlot te rekenen.
De programma’s hebben verschillende manieren gekozen om hun bezoekers aan zich te binden. Beter Rekenen en Rekenbeter.nl sturen elke werkdag een mailbericht dat er sommen voor je klaarstaan. RekenAPK straft degene die tien dagen verstek laat gaan met terugval naar een lager level. En dat gebeurt je echt maar één keer, of je haakt af…

	Beter Rekenen	RekenAPK	Rekenbeter.nl
Doelgroep	iedereen	vooral leerlingen vo	iedereen, ook ‘liefhebbers’
Aanbod	dagelijkse ‘test’ van vier opgaven	20 sommen per level 100 levels	dagelijks drie oefenopgaven en een doordenker
Apps	iPhone	geen	Android
Mobiele versie website	ja	geen	ja
Feedback en uitleg	goed	geen	goed

Over de auteurs

Sabine Lit is vele jaren pabo-docent rekenen-wiskunde geweest en werkt nu als zelfstandig onderwijskundige.
Martine den Engelsen is werkzaam als zelfstandig toegepast onderwijskundige, rekenspecialist en kenner van moderne media in het onderwijs. Ze houdt een blog bij over rekenapps (zie *www.rekenapps.com).*

De instructie staat centraal

SAMEN REKENEN IN HET VMBO: EEN PRAKTIJKVOORBEELD

[Marianne Espeldoorn, Joop Vaneker en Peter ten Dam]

Sinds enkele jaren proberen veel middelbare scholen vorm te geven aan rekenonderwijs om uiteindelijk te voldoen aan de normen zoals omschreven in het referentiekader. Zo ook binnen het vmbo op de scholengemeenschappen De Grundel en Twickel (met zes verschillende locaties in Hengelo, Borne en Delden). In dit artikel zal worden ingegaan op de praktische invulling van het rekenonderwijs op de genoemde scholen. Niet alleen de hoogtepunten, maar ook de hobbels die genomen moeten worden komen aan bod.

Met ingang van het schooljaar 2010-2011 is binnen de vmbo's van scholengemeenschappen De Grundel en Twickel een apart uur rekenen in de lessentabel opgenomen. Hieraan voorafgaand is met de schoolleiding een plan van aanpak opgesteld. Uitgangspunt was de in het jaar daarvoor vastgestelde *Contourennota vmbo*, waarin het rekenbeleid en uiteraard ook het taalbeleid reeds uitdrukkelijk genoemd staan en die samen met docenten van beide scholengemeenschappen is opgesteld. Belangrijkste reden voor een gezamenlijke Contourennota is dat er naar één vmbo van de beide scholengemeenschappen wordt toegewerkt. Voorwaarde voor goed rekenonderwijs bleek het toerusten van docenten met een effectieve didactiek. Door middel van bijeenkomsten waarbij training, consultatie en intervisie (TCI) centraal stonden, is de groep docenten geschoold in het effectief hanteren van de methode *Rekenblokken*. Er zijn bijeenkomsten georganiseerd waarbij de rekendidactiek voor de verschillende rekendomeinen inhoudelijk is besproken en uitgewerkt.

De start

Bij de start van het traject is door de schoolleiding besloten de begeleiding van de rekendocenten in handen te geven van een externe rekenspecialist. De docent moest voldoende in staat zijn om het rekenonderwijs op deze scholen inhoudelijk en didactisch vorm te geven. Daarnaast is in hetzelfde jaar een rekencoördinator aangesteld, die als opdracht heeft om de manier van onderwijzen van rekenen, de wijze van scholing van docenten vmbo, de implementatie en zichtbaarheid van de doorlopende leerlijn rekenen in alle leerwegen van het vmbo en de facilitering die nodig is voor het project te coördineren. De schoolleiding doet op de achtergrond mee door deelname aan de gezamenlijke bijeenkomsten over rekenen, lesbezoeken, strategische verkenningen met de rekencoördinator, enzovoort.

Van WAT naar HOE

De docenten werken met de methode *Rekenblokken* en gingen ervan uit met deze methode de gewenste doelen te kunnen bereiken. Docenten gaven rekenles op een manier die leerlingen omschreven als 'heel anders dan ze gewend waren op de basisschool'. Docenten bleken het lastig te vinden om de beginsituatie van de leerlingen te benutten bij de aanpak van hun lessen: wat kunnen de leerlingen al, hoe hebben ze rekenen geleerd en hoe kan ik daarop door gaan. Tijdens scholingsmomenten zijn de docenten vertrouwd geraakt met de werkwijze van het basisonderwijs. De docenten hebben gezien in rekenmethoden van de basisschool hoe leerlingen bepaalde denkstappen hebben leren noteren en welke didactische aanpak is gehanteerd. Tijdens studiemiddagen zijn lessen over delen, breuken, procenten en kommagetallen door docenten uitgewerkt waarbij niveauonderscheidingen (van concreet naar abstract) zijn toegepast. Docenten ontdekten dat de les waarbij grote getallen afgetrokken moesten worden, concreter werd wanneer je vanuit een context, zoals geld, werkt. Leerlingen zagen dat een briefje van honderd euro ingewisseld kon worden voor tien briefjes van tien euro. Op deze manier begrepen ze de som en konden deze oplossen. Dit betekende een omslag in denken van deze rekendocenten. In gesprekken met hen is steeds opnieuw hun rol besproken. *Wat is het effect van jouw keuzes bij de voorbereiding van de les, welke invloed wil je uitoefenen tijdens je les? Tot welke resultaten leidt dat bij leerlingen?* Het handelen van de docent werd telkens centraal gesteld. Dat hield wel in dat er afspraken gemaakt moesten worden over de didactiek. Een gedegen voorbereiding van de lessen kostte in deze fase veel tijd. Er is gezocht naar mogelijkheden om zo effectief mogelijk met de voorbereidingstijd om te gaan. Het intranet binnen de school biedt mogelijkheden om lesvoorbereidingen uit te wisselen. Docenten profiteren met en van elkaar.

Kijken in de klas

Tijdens klassenconsultaties zijn de instructievaardigheden van docenten geobserveerd en op video vastgelegd. Deze fragmenten zijn vervolgens tijdens scholingsmiddagen met elkaar bekeken en besproken zodat docenten van en met elkaar kunnen leren door middel van positieve feedback en ontwikkelingsgerichte ondersteuning.

Reacties van leerlingen

We hebben de leerlingen aan het eind van het 1e jaar de volgende vraag voorgelegd: *Wat vind jij belangrijk dat de rekenleraar moet weten over het rekenen op de basisschool?* Hierop kwamen de volgende reacties:

- welke boeken gebruikt zijn, hoe het uitgelegd is, op welke manieren je een som kunt uitrekenen;
- dat oefenen, de tafels kennen belangrijk is, dat het vaak moet worden herhaald
- wat de leerling wel en niet gehad heeft, wat de leerling moeilijk vond en waar de leerling goed in was;
- dat rekenen belangrijk is.

Het betreffen opmerkingen die

respectievelijk te maken hebben met de didactische aansluiting po/vo, de basisvaardigheden en de overdracht van gegevens (leerlingvolgsysteem). Leerlingen weten goed aan te geven wat zij nodig hebben: een bekwame docent!

Instructie staat centraal

In het tweede jaar van het traject is het programma van het eerste jaar herhaald en is het geven van instructie centraal gesteld. De instructies worden verzorgd op basis van de volgende kenmerken:

- uitgaan van situaties waarbij leerlingen zich iets kunnen voorstellen;
- kleine stappen (deelvaardigheden) en deze steeds expliciet met elkaar verbinden en toepassen;
- zelf hardop denken en leerlingen het oplossingsproces laten verwoorden;
- voordoen en hardop denken;
- gebruik van modellen en schema's;
- waar nodig het aantal strategieën beperken;
- veel aandacht voor automatiseren [1].

Deze aanpak kan in het directe instructiemodel verwerkt worden. Dit instructiemodel wordt in veel basisscholen toegepast. Docenten merken dat vaardigheden rondom het automatiseren continu aandacht behoeven.
Doorlopende lijnen
Om goed in beeld te krijgen hoe we het rekenen in onze scholen zo effectief mogelijk kunnen organiseren zijn plannen opgesteld. Daarbij is specifieke aandacht voor de leerlingen die geen wiskunde in hun pakket hebben. De leerlingen zijn geplaatst in de niveaus TGL/KBL en BBL [2]. Alle getalsvaardigheden, behorend bij het 2F-niveau, worden nu in de tweede klas behandeld. In de derde en vierde klas staan contextopgaven bij de overige domeinen centraal. Uiteraard moet het onderhouden van de getalsvaardigheden veel aandacht krijgen. De rekenactiviteiten moeten doorlopen naar de derde klas en zorgen voor een doorlopende leerlijn binnen ons vmbo.
Een actiepunt is nu dat het tweede leerjaar wordt afgesloten met een eindtoets 2F. De resultaten worden vergeleken met de starttoets 2F zoals deze bij de start van het schooljaar is afgenomen. Vervolgens zullen alle leerlingen bij de start van het derde leerjaar weer de 2F-toets doen om het niveau beter te kunnen bepalen en het onderwijs daarop af te stemmen.
Uit de resultaten van de eindtoets tweede klas en begintoets derde klas zullen een aantal rekenzwakke leerlingen naar voren komen die meer aandacht behoeven. Voor hen komt een extra rekenmoment waarbij vooral getalbegrip centraal staat, omdat veel problemen bij bewerkingen voortkomen uit beperkt begrip van getallen.
Alle leerlingen in de derde klas TGL hebben verplicht het vak wiskunde en de rekenactiviteiten worden dan ook gekoppeld aan het vak wiskunde. De leerlingen met wiskunde (KBL) krijgen hetzelfde aangeboden als de leerlingen op TGL niveau, maar lang niet alle leerlingen van de derde klas KBL hebben wiskunde in het pakket. Die leerlingen krijgen een extra lesuur rekenen waarbij alle domeinen behalve getalsvaardigheden worden behandeld. Uit de resultaten van de eindtoets klas 2 en begintoets klas 3 zal blijken welke leerlingen extra ondersteuning moeten krijgen.

Successen

Docenten kiezen er nu bewust voor om de methode los te laten op momenten dat het kan en dat een effectieve instructie meer resultaat heeft. Docenten horen van leerlingen dat ze bij rekenen iets hebben geleerd wat ze ook bij andere vakken kunnen toepassen. Wiskundedocenten merken dat leerlingen makkelijker met bepaalde rekenopgaven aan de slag kunnen. Rekenen leeft bij leerlingen en docenten.
Uit de resultaten van de toetsen van zowel de eerste als de tweede klas BBL, blijkt dat veel leerlingen nog moeite hebben met het 1F-niveau. De huidige regelgeving die zegt dat 2F voor het gehele vmbo geldt, lijkt misschien niet haalbaar voor alle leerlingen. Toch proberen we ze op dit niveau te krijgen door het KBL programma rekenen aan te bieden met daarnaast heel veel aandacht voor rekenen bij de rekenverwante vakken. Binnen de praktijkgebonden vakken gaan we naar een eenduidige aanpak van de rekenonderdelen waarbij onder andere eenduidige afspraken gemaakt zijn over rekenregels en -aanpak.



Wensen

Binnen de school wordt nagedacht hoe de extra lesmomenten een vaste plaats in het rooster kunnen krijgen zodat sectorbreed in niveaus gewerkt kan worden.
De didactiek blijft centraal staan in de rekenles. We hebben er goede ervaringen mee. De didactische vaardigheden van docenten in de onder- en bovenbouw worden verder versterkt door middel van scholing. Om een start te kunnen maken met de doorlopende leerlijnen is het wenselijk dat een aantal docenten die nu het vak rekenen geven in de onderbouw, meegaan naar de bovenbouw.
We willen meer aandacht hebben voor het toetsbeleid. Frequent toetsen (duidelijk herkenbare basis, verdieping en verbredingstof) door het jaar heen en data-analyse van de resultaten moeten vervolgens de basis vormen voor de vereiste differentiatie. Welke leerlingen gebruik gaan maken van de extra lesmomenten zal vooral bepaald worden door deze data-analyse.
De centrale schoolleiding heeft voor het volgend schooljaar voor de onderbouw maar nu ook voor de bovenbouw, financiële middelen gereserveerd. Schoolleiding, docenten en ondersteuners zijn allen verantwoordelijk voor de opbrengsten in het (reken)onderwijs en zullen dus ook moeten samenwerken om goed rekenonderwijs mogelijk te maken.

Noten

[1] G. Gelderblom, J. Kaskens, Z. van Rij (2009): *Doorlopende leerlijn rekenen-wiskunde. Risicoleerlingen en interventies*. Amersfoort: CPS.
[2] Binnen het vmbo worden de volgende leerwegen onderscheiden: BBL (staat voor Basisberoepsgerichte leerweg); KBL (Kaderberoepsgerichte leerweg); TGL (Theoretische en gemengde leerweg).

Over de auteurs

Marianne Espeldoorn is onderwijsadviseur en rekenspecialist bij Expertis Onderwijsadviseurs, Hengelo.
Joop Vaneker is LD-docent en rekencoördinator Scholengemeenschap De Grundel, Hengelo.
Peter ten Dam is teamleider Parkcollege De Grundel, Hengelo.

Het metriek stelsel

[Frans Ballering]

Bij het leren omrekenen van maten komen al snel de schema's van het metriek stelsel en/of de trappetjes te voorschijn. Er wordt geschoven met nullen en komma's. En dat gebeurt ook al op de basisschool. Meestal blijkt dat in het vo en mbo daar niet of nauwelijks mee overweg kunnen. Geven we ze niet teveel abstracties en te weinig beelden? Aan de hand van een uitgewerkte voorbeeldles van een student gaat de auteur in op het belang van betekenisvolle meetproblemen waar leerlingen zelf oplossingen bij moeten bedenken.



figuur 1

Voorbeeld – een les voor havo-1

'Het hoofdstuk in het boek gaat over het meten van lengten, oppervlakten en inhouden.'[1]

Het valt mij op dat leerlingen het moeilijk vinden om de begrippen oppervlakte en omtrek op de juiste manier te gebruiken en beide begrippen niet door elkaar te halen. Zelf denk ik dat je als eerste moet zorgen dat leerlingen een goed beeld krijgen bij zowel het begrip oppervlakte als het begrip omtrek.

Als ik begin met dit onderwerp stel ik de leerlingen de vraag: 'Wat weet je van oppervlakte?' of 'Wie kan iets vertellen over oppervlakte?' of 'Schrijf vijf woorden op die volgens jou met oppervlakte te maken hebben.' Zo begon ik ook deze les.

De meeste leerlingen roepen dan dat het iets te maken heeft met *lengte* × *breedte*. Vaak is dat een uit het hoofd geleerd iets en begrijpen ze niet altijd wat het precies voorstelt. Op die manier is de kans groot dat leerlingen de begrippen oppervlakte en omtrek door elkaar gebruiken.

Als leerlingen komen met: *oppervlakte* = *lengte* × *breedte*, dan ben ik daar niet tevreden over. Ik vertel ze natuurlijk wel dat het zeker niet fout is wat ze roepen.

Betekenis verlenen

Ik gebruik een toetsblaadje als voorbeeld om het beeld van oppervlakte duidelijk te maken. Vorig jaar hadden we in alle lokalen nog een 'ouderwets' bord en het deel met de hokjes was natuurlijk prima te gebruiken om de leerlingen een beeld te laten vormen van oppervlakte. Dit jaar met een blaadje.

Ik stelde de leerlingen de volgende vraag: 'Hoe kun je bepalen hoeveel hokjes er op het blaadje staan?' Er kwamen verschillende antwoorden uit de klas: gewoon alle hokjes tellen, alle hokjes naast elkaar en alle hokjes boven elkaar te tellen en die twee getallen met elkaar vermenigvuldigen. Waar het mij natuurlijk om gaat op zo'n moment is dat leerlingen duidelijk begrijpen dat oppervlakte te maken heeft met hoeveel er op iets past. Dan ontstaat de juiste beeldvorming bij het begrip oppervlakte.

Meerdere voorbeelden die ik gebruik: het voorbeeld met de tafel (met mijn hand *over* de tafel gaan, dat is de oppervlakte; met mijn hand *óm* de tafel gaan is de omtrek). Hoe meer voorbeelden (*ook muren hebben oppervlakte, ook het plafond, ook een ronde tafel, ook een sleutel of een bloemblaadje…*) hoe duidelijker de beeldvorming wordt bij de leerlingen.

Voorbeelden oppervlakte: hoe groot is je tafel, hoeveel hokjes passen er op een bladzijde in je schrift, hoeveel hokjes zouden er op de voorkant van je wiskundeboek passen, enzovoorts.

Voorbeelden die ik gebruik bij omtrek: hoeveel meter hek past er om een weiland heen, hoeveel meter moet je lopen als je om het voetbalveld loopt, enzovoorts.

Zelf doen

De leerlingen krijgen dan eerst de gelegenheid om zelf een aantal voorbeelden te verzinnen.

Waar heb je oppervlakte en omtrek voor nodig? Leerlingen komen dan vaak met leuke ideeën: zelf een lijst maken om een mooie poster, dus toen moest ik de lengte en de breedte meten en dat allemaal optellen en toen wist ik hoeveel cm rand ik nodig had.

Een andere leerling was aan het verhuizen en mocht helpen de muur in zijn kamer te schilderen. Dan is het toch wel handig om te weten hoeveel m^2 verf nodig is. Hij moest dus eerst de oppervlakte uitrekenen van de muur. Te oordelen naar de opmerkingen van de leerlingen hadden zij al een zeer goed beeld in hun hoofd van de begrippen oppervlakte en omtrek en in elk geval voldoende voorbeelden om op terug te vallen.

De volgende stap is dan schematiseren (geabstraheerd). Daar bedoel ik mee dat we gaan werken met de formules om de oppervlakte en omtrek uit te rekenen. Ik vind het heel belangrijk dat de leerlingen bij dit onderwerp steeds de woorden omtrek en oppervlakte benoemen en opschrijven. Dus elke keer als ze iets moeten uitrekenen bij een som, moeten ze van mij beginnen met één van beide woorden.

Voorbeeld. De eerste som in het boek is een plaatje van een weiland van boer Hekman en de boer gaat een afrastering om het weiland maken. Hoeveel meter is de lengte van de afrastering?

De leerlingen moeten dan van mij bedenken of het nu om de oppervlakte of de omtrek gaat, en dat ook netjes opschrijven. Dus: *omtrek* = 60 + 40 +…+… = … *meter.*

Leerlingen zijn zich op die manier steeds bewust van wat beide begrippen inhouden. Nu gaat het oefenen verder!'

Tot zover de ervaring van de studente en haar leerlingen.

Didactieklessen

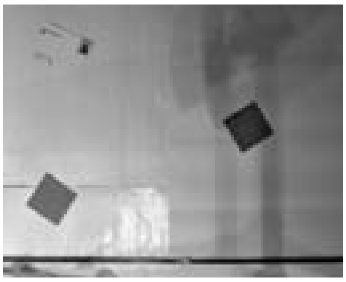
Oppervlakte en omtrek zijn terugkerende

onderwerpen in onze lessen aan de lerarenopleiding.. Zou het kunnen zijn dat de oppervlakte van een rechthoek een zo vaak terugkerend onderwerp is dat leerlingen uit het oog verliezen wat er achter zit? Zo vaak moeten ze de lengte en de breedte met elkaar vermenigvuldigen dat *lengte* × *breedte* het eerste is waar ze aan denken? Blijkbaar wordt de waarom-vraag niet vaak gesteld.
We bespreken in zulke lessen dat het woord oppervlakte dus niet het beeld oproept van een voorwerp met hoeveel erop past of een hand die over een tafel wrijft, of een schilder die een muur schildert, maar wel onmiddellijk het *lengte* × *breedte*. Het oorspronkelijke begrip van oppervlakte is op de achtergrond geraakt.

Stel je voor: je bent leerling en je komt naar een wiskundeles met jouw idee bij oppervlakte (= *lengte* × *breedte*). In de les komt het metriek stelsel aan de orde. Een mooi schema met trappetje en de leraar legt uit hoe het zit met de nullen en de komma's. Wat heb je dan nodig om daar iets van te kunnen begrijpen? Begin je als leraar dan niet aan het eind? Hoe sluit je aan bij de kennis van de leerling?
Leerlingen hebben weinig ervaring met meten, dus ook met maten. Geven we ze die ervaringen? Hoeveel leerlingen kunnen er op een vierkante meter staan? En op een papier van 50 × 200 cm? Hoeveel A4-tjes heb je nodig voor een vierkante meter? En hoeveel A5-jes?

Beelden

Ik geef enkele voorbeelden om dit de illustreren.
Een vierkante meter met daarop geplakt in een andere kleur een vierkante decimeter en een vierkante centimeter vormen een indringend beeld (***zie figuur 2***). Dat er honderd van die vierkante decimeters op passen is snel te zien en dat er veel meer dan honderd vierkante centimeters op kunnen is ook meteen duidelijk.



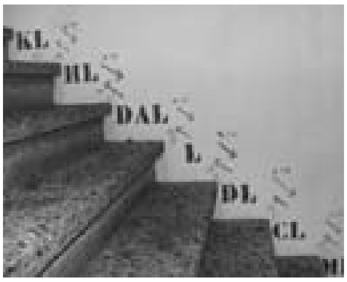
figuur 2

De omtrek van die vierkante meter is natuurlijk 4 meter; je hebt vier duimstokken nodig voor de omtrek. Hoe zit dat met een strook papier van 50 × 200 cm? Hoe groot is de oppervlakte? Hoe groot is de omtrek? Natuurlijk zorg ik voor een echte strook papier op de grond van mijn lokaal.

Met een papieren meter van de Gamma het lokaal of de gang opmeten, het aantal tegels tellen dat op de gang ligt of op het schoolplein zijn concrete ervaringen die leren omgaan met maten. Hoeveel meter plint heb je nodig voor je kamer of de gang? Ook met een vierkante meter een oppervlakte opmeten geeft voor veel leerlingen een beeld. Je ervaart dan ook dat een duimstok met rekenwerk eigenlijk veel handiger is om een oppervlakte te bepalen!

Wat heb je nodig?

Hebben vmbo-leerlingen die schema's van ons met trappetjes en schuiven met nullen en komma's eigenlijk wel nodig? Ik waag dat te betwijfelen. Dergelijke abstracties horen aan het eind van een leerproces en die schema's moeten het handelen en denken ondersteunen. Maar wat moeten ze eigenlijk kunnen? Vierkante meters omrekenen in vierkante decameters? Heb ik in de praktijk nooit gezien. Vierkante centimeters omrekenen in vierkante kilometers? Niet in hun wereld. Ares en centiares? Nooit iets van gemerkt.



figuur 3

Van centimeters naar meters, van meters naar kilometers, van hectares naar vierkante meters en omgekeerd, van m^3 naar liters, zulke berekening komen vaak voor. En in sommige beroepen zijn milliliters en cm^3 van groot belang dus daar houden we rekening mee, maar die details zijn vroeg genoeg in klas 3. Ik denk dat deze leerlingen gebaat zijn bij veel schatten. Het aantal vierkante decimeters op een tafel kun je met je vingers redelijk schatten, maar niet zonder een goed begrip van oppervlakte.

Hoeveel balpennen is de omtrek van je tafel? Je snapt meteen dat een timmerman geen balpen gebruikt om iets op te meten. Hoeveel dm^3 passen er in die plantenbak? Hoeveel dm^3 kunnen er in je lijf? Hoeveel liter water zit er in een badkuip?

En als er omgerekend wordt moet de tafel van 10 en die van 100 nog maar eens op de proppen komen. Dat werkt met nullen. (Dat werkt in de dubbele betekenis van het woord.)
In de havo/vwo-klassen kunnen we best tafels van $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ opvoeren en daarna ook van 0,1 en van 0,01. Daarna worden de schema's een stuk handiger. Zo'n handig schema is dan een goede motivering om enkele minder gangbare maten als are en centiare en decameter toch maar mee te nemen. Anders zitten er gaten in. Kun je ook nog bij het kadaster gaan werken.

Oefenen

En dan moet er natuurlijk geoefend worden. Maar tijdens dat oefenen moet af en toe de concrete werkelijkheid er weer bij worden gehaald, want anders wordt oppervlakte toch weer *lengte* × *breedte* of wordt 100 cm^2 een vierkante meter.
Rekenen met maten moet worden voorafgegaan door meten, het zelf doen van metingen en het ervaren van afmetingen met je vingers en je handen en je hoofd. Als we leerlingen leren om zelf voorbeelden aan te dragen en de begrippen onder woorden te brengen, kunnen ze in veel gevallen zelf de problemen oplossen.

Noot

[1] Ellen van den Berg beschreef tijdens haar opleiding in haar werkstuk vakdidactiek deze les over 'Omtrek en Oppervlakte voor havo-1 voor de methode *Getal & Ruimte*, hoofdstuk 7'.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

Rekenwerkgesprek

SNEL ZICHT KRIJGEN OP REKENPROBLEMEN IN DE KLAS

[Ria Brandt en Henk Logtenberg]



Focussen

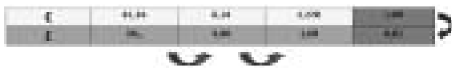
Een lesuur rekenen vliegt voorbij. Rekendocenten vinden het lastig om in de beschikbare tijd de leerling die vastloopt in zijn dagelijkse rekenwerk snel even verder te helpen. Met het *rekenwerkgesprek* heeft de rekendocent een praktisch hulpmiddel in handen, waarmee hij in enkele stappen samen met de leerling het rekenwerk kan analyseren én de rekeninstructie sterker kan afstemmen op de onderwijsbehoeften van de leerlingen. Zo'n gesprek duurt 10 à 15 minuten, maar kan ingekort worden tot 5 minuten. Het rekenwerkgesprek bestaat uit vijf kaarten die te vinden zijn in een PowerPoint-presentatie die vrij te downloaden is van de site van CPS [1].
Bij het analyseren van geringe rekenproblemen zie je soms niet direct waar de leerling vastloopt, maar met de stappen van het rekenwerkgesprek kun je als docent scherper zicht krijgen op meerdere aspecten van het rekenprobleem en kun je leerlingen handvatten geven (én prikkelen) om weer greep te krijgen op rekenopgaven.

Een opgave

Met de eerste kaart (*de cirkelkaart*) van het rekenwerkgesprek maakt de rekendocent voor zichzelf een beeld om welk domein het van het referentieniveaus rekenen gaat (en wat de leerling hiervan moet beheersen) én om welk aspect het van het leren rekenen gaat.
In het voorbeeld heeft de rekenopgave raakvlakken met de domeinen getallen, verhoudingen en verbanden. In deze opgave staat bij het leren rekenen de begripsvorming en het ontwikkelen van oplossingsprocedures centraal.
Bij de *werkkaart* (kaart 2) wordt het drieslagmodel (aanpak, bewerking, reflectie) van het Protocol voor Ernstige RekenWiskunde-Problemen en Dyscalculie (ERWD) geïntroduceerd. In drie slagen kan de docent in interactie met de leerling proberen de leerling greep te laten krijgen op de rekenopgave. Want voordat de leerling werkelijk tot rekenen komt, zullen er eerst een paar hobbels genomen moeten worden: taal (transactie, nota, koers, valuta), rekenbegrippen (Engelse pond, subtotaal, tarief), rekennotatie (£ en €), wat moet je doen met de koers én hóe kun je het beste deze rekenopgave uitrekenen (cijferen, zakrekenmachine). Ook biedt deze rekenopgave aanknopingspunten voor rekenen in de vakken of rekenbewust vakonderwijs bij economie, handel en administratie en bedrijfsrekenen in vmbo, havo of mbo. Eerst is er de verkenning op het probleem, vervolgens voert de leerling de bewerking uit en tenslotte wordt er gereflecteerd (Past dit antwoord wel bij deze opgave?).

Derde kaart

Voordat de leerling aan de bewerking toekomt, moet de leerling begrijpen wat hij moet doen. Bij deze opgave is het van belang dat de leerling de relatie ziet tussen de valuta Engelse pond (GBP) en de euro.
We gebruiken hiervoor de *ijsbergkaart*. Een leerling met geringe rekenproblemen ziet vaak niet direct op formeel niveau wat hij moet doen (werken met rekensymbolen en -bewerkingen). Door de rekensituatie in een schema te zetten ontdekken leerlingen koppelingen die ze eerst niet zagen, maar die er wél zijn. In plaats van aan de oppervlakte te rekenen (formeel niveau), werken we onder de waterspiegel aan het begrip (van de werkelijkheid, via een realistisch model, naar een denkmodel). Bij deze rekenopgave wordt daarbij gebruik gemaakt van het denkmodel de verhoudingstabel (***zie figuur 2***).



figuur 2 Verhoudingstabel

Door de verhoudingstabel herontdekken de leerlingen de relatie tussen het GBP, euro én de betekenis van de valuta daarbij. Voor £ 50,00 moet je € 61,36 betalen, £ 5,00 → € 6,14 en £ 1,00 → € 1,228. Verticaal is in de laatste kolom aangegeven, dat £ 1,00 → € 0,81 waard is (de valuta). Via de verhoudingstabel kan de leerling zien dat

Rekenopgave – Meryem gaat op werkweek naar Londen. Zij heeft een eigen ING-betaalrekening. In Groot-Brittannië kan zij pinnen. Maar zij wil ook graag wat contant geld op zak hebben als ze aankomt in Londen. Via de site van de ING kan zij Buitenlands Geld bestellen. Op de ING-site staat dat het bestellen van Buitenlands Geld € 6,00 per transactie kost. Ze besluit samen met haar vriendin Karin de Engelse ponden te bestellen en de transactiekosten samen te delen. Haar vriendin wil 15 pond en zijzelf bestelt 35 pond. Online vult zij alles in en krijgt een nota als ***in figuur 1***.



figuur 1

Hoeveel euro's moet Meryem betalen en hoeveel haar vriendin Karin?

voor £ 15,00 (= drie keer £ 5,00) → € 18,42 betaald moet worden (drie keer € 6,14) én voor £ 35,00 (zeven keer £ 5,00) → € 42,92. De stap van het denkmodel naar de formele bewerking kan genomen worden door de verhoudingsom van de tabel: … × £ 0,81 = £ 50,00 om te draaien naar de formele bewerking: £ 50,00 / £ 0,81 = € 61,36.
Twee dingen moeten we nu nog doen: (1) samen met de leerlingen de verschillen in de eindbedragen bespreken (in verband met de afrondingen) en (2) het tarief van de transactiekosten evenredig verdelen over Meryem en Karin. Meryem moet in totaal € 45,92 betalen en Karin € 21,42.

Inschalen



figuur 3 Schaalkaart

De vierde kaart, de *schaalkaart* (***zie figuur 3***) heeft tot doel de eigen kracht van de leerling in te zetten bij de oplossing van de rekenopgave. De docent vraagt aan de leerling om zichzelf een cijfer te geven voor de beheersing van bovengenoemde rekenopgave (op een schaal van 1 tot 10). Stel voor dat de leerling zichzelf een vijf geeft. Je kunt dan vragen naar welk cijfer de leerling wil toewerken (bijvoorbeeld een zeven). De vraag aan de leerling is, wat hij zelf aan 'krachten en kwaliteiten' kan inzetten en wat hij nodig heeft om tot die zeven te komen. Hierdoor krijg je als docent informatie op tafel die anders misschien verscholen was gebleven. De input van de leerling kan variëren van: doorzettingskracht, motivatie, faalangst, controle op het werk, visualiseren van sommen, taalvaardigheid, samen opgaven maken, opdelen van sommen, oefenen van deelvaardigheden etc. De docent kan bij deze rekenopgave deze informatie én kwaliteiten van de leerling inzetten (gebruiken) om tot de juiste afstemming op de onderwijsbehoeften van de leerling te komen.

Quick Reference Card

Het rekenwerkgesprek sluit af met de Quick Reference Card. Op deze kaart staan extra aandachtspunten over rekenen en leerlingenkenmerken, zoals taal, manier van leren, getalontwikkeling, motivatie en vormen van rekenen (zie afbeelding 4).

Kaart	Leerlingkenmerken
1. Cirkelkaart	A. Taal (rekenbegrippen, rekennotaties)
2. Werkkaart	B. Manier van leren (visueel, auditief, motorisch, coöperatief, construerend, modellerend)
3. IJsbergkaart	C. Getalontwikkeling (gevoel voor getallen en getalbegrip)
4. Schaalkaart	D. Motivatie, affectie, concentratie & geheugen
	E. Vormen van rekenen (schatten, hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen, zakrekenmachine, oplossingen buiten het rekenen)

figuur 4 Quick Reference Card

Deze kaart heeft als functie om docenten inzicht te geven in het stramien van het rekenwerkgesprek en om leraren te herinneren (en attenderen) om ook andere dan rekenaspecten te betrekken bij de rekeninstructie. Achterop op de Quick Reference Card kaart staat schematisch weergegeven hoe je een prioritering in de onderwijsbehoeften kunt aanbrengen.

Transfer

Het is niet altijd nodig om het gehele rekenwerkgesprek te doorlopen met de leerling. Soms is het efficiënter om te focussen op slechts een deelaspect van het rekenwerkgesprek, en dit met meerdere leerlingen tegelijkertijd te doen. Het rekenwerkgesprek is een middel voor de docent om belangrijke verscholen pedagogische en didactische informatie van de leerling zelf scherp in beeld te brengen. De docent kan deze informatie toepassen in het dagelijkse rekenwerk van de leerling met als doel de leerling meer greep te laten krijgen op het rekenen.

Noot en literatuur

[1] Zie: *www.cps.nl/nl/Diensten/Publicaties/PublicatiesZoeken/Onderzoek.html?pid=Rekenwerkgesprek*
- Website Neurokids: *http://neurokids.nl/experimenteer/gat-in-je-hand/*
- E. Kuiper (2012): *Rekenopdrachten.*

Over de auteurs

Ria Brandt en Henk Logtenberg zijn senior consultants bij CPS.



Bèta in beeld

Waarom Wetenschap101?
Wetenschap101 is een videoblog over exacte wetenschap. Verrassend, enthousiasmerend en toegankelijk. En: allesbehalve tijdrovend. Want de filmpjes op Wetenschap101 duren nooit langer dan 101 seconden. Dat hebben we zo afgesproken.

Waarom 101? – Niet omdat dat het 26ste priemgetal is, of het atoomnummer van mendelevium (Md), of het aantal dalmatiërs in de Walt Disney-film. Wél omdat 101 in de Verenigde Staten, Canada en Australië gebruikt wordt als het cursusnummer van een inleidend college op beginnersniveau, voor welk vak dan ook. En onze filmpjes moeten ook voor iedereen toegankelijk zijn. Daarnaast geloven we dat je in 101 seconden precies één idee kunt vertellen. Lekker kort, maar wel met inhoud.

Van start – Wetenschap101 is eind februari 2012 van start gegaan, met bijdragen van Ionica Smeets (wiskunde) en Govert Schilling (sterrenkunde). In de toekomst komen er vast ook andere onderwerpen aan bod.
Wetenschap101 kent geen verdienmodel. We steken onze tijd en energie in dit project omdat we van ons vakgebied houden, en andere mensen daarvoor graag enthousiast maken. De informatie op Wetenschap101 is dan ook gratis beschikbaar voor iedereen. De filmpjes mogen door iedereen worden verspreid en doorgeplaatst, zo lang er bronvermelding plaatsvindt, bij voorkeur met een link naar de website (*http://wetenschap101.nl*).

Reacties welkom! – Verder zijn we natuurlijk benieuwd naar de reacties van kijkers en bezoekers! Vandaar dat de website de mogelijkheid biedt om op elk filmpje te reageren. Vragen stellen mag natuurlijk ook, en misschien maken we daar dan weer een filmpje over.

URL – *http://wetenschap101.nl/*

PERSBERICHT /
HERVORMD LYCEUM WEST WINT EUROPESE PRIJS

europees platform

Het project *A Taste of Maths* (ATOM) waaraan het Hervormd Lyceum West in Amsterdam deelnam, heeft de jaarlijkse Europese eTwinning-prijs gewonnen in de categorie 12 tot en met 15 jaar (voor het schooljaar 2010-2011).
Uniek, want het is voor het eerst dat een Nederlandse school deze prijs wint. De prijs, die bestaat uit een reis (van een week, eind april) naar Antalya (Turkije) voor de leerlingen en hun Europese projectgenoten, is eind maart uitgereikt aan de enthousiaste leerlingen (***zie foto 1***) en hun wiskundeleraar Erik Atsma.

Het ATOM-project is een online samenwerkingsproject met docenten uit Roemenië, Tsjechië, Spanje, Griekenland en Italië. De betrokken leerlingen, tussen de 12 en 16 jaar oud, werkten gedurende een schooljaar samen in het Engels, in het kader van tweetalig onderwijs (tto). Het doel van ATOM was leerlingen te enthousiasmeren voor het vak wiskunde door ze te laten zien dat wiskunde in het dagelijks leven een belangrijke rol speelt. Dit gebeurde aan de hand van het thema voedsel. De leerlingen rekenden bijvoorbeeld uit wat een punt appeltaart in elk land kost en vergeleken dat. Ze stuurden elkaar wiskundige problemen en presenteerden de antwoorden door gebruik te maken van verschillende soorten software.
Erik Atsma zegt hierover: ‘Leerlingen raken gemotiveerd wanneer ze op een andere manier naar de wereld om hen heen leren kijken. Dat enthousiasme zie je terug als ze in hun vrije tijd met leeftijdsgenoten in Europa online contact onderhouden. Het niveau van het Engels van mijn leerlingen is vaak hoger dan van de andere Europese leerlingen en dat geeft ze veel zelfvertrouwen. Inhoudelijk vind ik het boeiend dat ze in de verschillende landen bij het wiskundig oplossen van de vraagstukken, andere oplosmethoden en -strategieën gebruiken. Zo leren de leerlingen dat er meer dan één manier is om tot een goed antwoord te komen.’



foto 1 Leerlingen van het HLW na bekendmaking van de prijs (foto: Floor Nusink)

Info
- Floor Nusink, medewerker projecten eTwinning: *nusink@epf.nl*
- Europees Platform / Postbus 1007 / 2001 BA Haarlem / tel. 023 5531150
- Website Europees Platform: *www.europeesplatform.nl*
- Website eTwinning-project: *www.etwinning.net*
- Video HLW: *www.youtube.com/watch?v=T1Gep8GoZJw&feature=relmfu*
- In *Euclides* 87(4), pp. 148-151, staat een artikel over het ATOM-project.



Van de bestuurstafel

[Kees Lagerwaard, secretaris]

Tegen verplicht wiskunde-C op havo

21 maart 2012 – Het bestuur van de NVvW is tegen het invoeren van een verplicht vak wiskunde-C voor het havo-profiel C&M en wel om de volgende redenen.

- De invoering van een strengere zak-slaagregeling in 2012 en de aangekondigde verplichte rekentoets 3F zorgt al voor een aanzienlijke verzwaring. Als daar nog een verplicht examenvak wiskunde-C aan wordt toegevoegd, zal het behalen van een havo-diploma voor veel C&M-leerlingen onmogelijk worden.
- Gelet op de kleine aantallen leerlingen zullen scholen mogelijk gaan proberen de leerlingen met wiskunde-C in de lessen voor wiskunde-A onder te brengen, of de kleine wiskunde C-groep met te weinig lessen op het examen voor te bereiden. Zo wordt wiskunde-C geen volwaardig vak maar een ondergeschoven kindje.
- De doorstroming naar havo wordt voor vmbo-leerlingen zonder wiskunde onmogelijk.

Toelichting

Inleiding – De minister heeft onlangs aan de Tweede Kamer gemeld dat ze in havo en vwo niet tot reductie van het aantal profielen overgaat. Maar tegelijkertijd heeft ze vastgesteld dat het profiel C&M van havo het enige profiel is zonder wiskunde. Een deel van deze leerlingen neemt als keuzevak wiskunde A, maar het overgrote deel doet eindexamen zonder wiskunde. Dat vindt ze niet goed.
Dus wordt wiskunde ook een verplicht vak voor de C&M-leerlingen in havo.
De minister heeft cTWO gevraagd een voorstel te formuleren voor de invulling van een havo-vak wiskunde-C.

Wiskunde-C havo en rekenen, twee verzwaringen tegelijk – Het verplichte vak wiskunde-C voor havo komt vrijwel tegelijk met de verplichte rekentoets 3F.
En zoals bekend is de nieuwe zak-slaagregeling streng. Dat zal dus kunnen betekenen dat C&M-leerlingen die op dit moment nog kunnen slagen zonder rekenen en wiskunde, straks twee hordes moeten nemen op een terrein waarop meestal niet hun grootste kwaliteiten liggen. Wij vinden het niet verantwoord dat we voor leerlingen die welbewust kiezen voor dit profiel, het behalen van een havo-diploma extra moeilijk maken.
Een hbo-opleiding op het terrein van bijvoorbeeld kunst, talen of geschiedenis zal daardoor voor een aantal leerlingen onhaalbaar zijn. Niet vanwege hun gebrekkige talenten op die terreinen, maar omdat rekenen en wiskunde hun de doortocht zullen beletten.

Een praktisch bezwaar vanuit het veld
Mede dankzij het feit dat een aantal leerlingen uit het profiel C&M wiskunde-A kiest, zijn de groepen wiskunde-A op havo meestal voldoende groot. Wanneer de C&M-leerlingen straks wiskunde-C moeten kiezen, worden de groepen wiskunde-A kleiner en zal er vaak met vrij kleine aantallen leerlingen bij wiskunde-C moeten worden gewerkt. Dat kan betekenen dat de schoolorganisatie de groepen wiskunde-A en -C zo veel mogelijk wil combineren of dat een kleine groep wiskunde C-leerlingen zich zal moeten redden met een te klein aantal contacturen. Daar komt nog bij dat het verplicht aanbieden van wiskunde-C ten koste zou kunnen gaan van het keuzevak wiskunde-D dat op een aantal scholen ondanks het bescheiden aantal leerlingen toch wordt aangeboden. Scholen staan vast niet te trappelen om twee wiskundevakken aan te bieden voor betrekkelijk kleine groepen. Wiskunde-D lijkt een zeer positief effect te hebben op het kiezen voor een exacte vervolgstudie. Het zou bitter zijn als dit vak zou worden verdrongen door wiskunde-C.

Doorstroming vmbo-havo – Op vmbo zijn er sectoren waar wiskunde geen verplicht vak is. Leerlingen zonder wiskunde kunnen niet meer doorstromen naar havo als in elk profiel wiskunde verplicht is. En het is maar de vraag of de aansluiting van wiskunde in het vmbo naar een nieuw wiskunde-C wel zonder problemen kan verlopen. We weten dat de aansluiting naar de bestaande havo-wiskundes ook niet bepaald vlekkeloos verloopt.

Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!

WWW.REKENBETER.NL

[Sieb Kemme]

Doordenker 87-6

In 1926 publiceerde Pieter Wijdenes (1872-1972) zijn *Theorie der rekenkunde*. In het voorbericht richt hij zich tot de '*leeraren: ik verzoek U dringend dit werkje niet ongelezen terzijde te leggen, maar het in zijn geheel rustig en langzaam door te lezen en te overdenken en mij te volgen bij het leggen van de grondslagen, in de wel overwogen bepalingen en in de met zorg gevoerde bewijzen.*'

Als je echter probeert de ruim aanwezige opgaven te maken, dan overvalt je alleen al bij het rustig en langzaam lezen een lichte tot hevige paniek. Daarvan dit voorbeeld (pagina 95, opgave 2):
'Drie gebeurtenissen A, B en C hebben periodiek plaats, A om de 30, B om de 36 en C om de 40 dagen; als ze op Woensdag 23 September 1925 zijn samengevallen, op welken datum zullen ze dan voor den vierden keer op een Vrijdag samenvallen ?'

Inzenden
Oplossingen **vóór 25 juni a.s.** op het blog van *Rekenbeter.nl* (of per e-mail naar *info@rekenbeter.nl*).

U kunt zich aanmelden op « *www.rekenbeter.nl* » als lezer van *Euclides*. U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een e-mailbericht met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden online in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

De reacties op Doordenker 86-4

De opgave

In omgekeerde richting – Volgeschreven kladblaadjes breng ik naar de papierbak, toch ontroeren autosnelwegen me elke keer opnieuw. Leve de vrijheid! Binnen vier uur ben je in Parijs, geen probleem. Tandenborstel en paspoort mee, verder zien we wel. En vannacht kunnen we in Polen zijn.
Zo waren mijn vriendin en ik vorige week op weg naar mijn broer om keukenkastjes op te halen.
Het was druk op de weg. Ik schatte de gemiddelde afstand tussen twee auto's (van achter- tot voorbumper) op veertig meter, terwijl men toch honderd kilometer per uur reed.
Twintig kilometer buiten Amsterdam kwamen we in een file terecht. De gemiddelde afstand tussen twee auto's was nu nog maar één meter, het was stilstaand verkeer. Nu er geen kaart meer viel te lezen, keek ik achterom. Inderdaad stonden daar al heel snel een heleboel auto's.
'We komen zeker hoe langer hoe meer vooraan in de file te staan?'
'Ja', zei ik, maar ik wist het eigenlijk niet. Alle auto's die ik kon zien, stonden al stil. Even later daalde een onwezenlijke stilte neer over het stuk asfalt. Daar stonden we dan, midden in het weiland. De automobilist achter ons zwaaide me vriendelijk gedag, toch bleef ik nog even kijken.
Ze leek mijn gedachten te raden. 'Als het even druk blijft als daarnet, hoe lang zou het dan duren voordat de file Amsterdam bereikt?'
'Ik geloof dat je moet dan weten hoe lang de gemiddelde Nederlandse auto is.'
'Vierhonderd centimeter. Nou meneer de puzzelmaker, nou?'

Deze Doordenker uit de bundel *Knars* heeft inderdaad een aantal mensen doen knarsetanden. Van de 12 reacties is meer dan de helft tamelijk wanhopig. Toch is het probleem zeer realistisch: Op weg van Amsterdam naar Den Haag sta je na 20 km ineens in de file en zie je de file achter je aangroeien richting Amsterdam. Je vraagt je af hoe lang het zal duren tot die staart Amsterdam bereikt zal hebben. Alle noodzakelijke aannames staan in de tekst. Maar de tekst is nogal uitgebreid en de informatie staat daar wat verstopt tussen. Veel rekenaars vinden dat niet leuk en hebben liever recht-toe-rechtaan rekenopdrachten. Toch werkt dat niet in het 'echte leven' en hecht de redactie van *rekenbeter.nl* ook aan rekenopdrachten in rijkere en dus ingewikkelder contexten. Drie personen hebben correcte oplossingen gegeven, waarvan Gerard Riphagen zelfs op twee verschillende manieren.

De oplossing van Munters

Dit is een grappig probleem, omdat het in eerste instantie lijkt alsof je niet genoeg informatie hebt, ofwel foutief is ('de auto's staan stil, dus de file bereikt Amsterdam nooit').
Mijn eerste gedachte was inderdaad ook 'nooit'. Toen dacht ik, de file wordt in theorie 40.000 km lang, tot de staart Amsterdam bereikt. Maar dat is natuurlijk onzin.
Nogmaals lezen, en grappig genoeg staat nergens dat ze *naar* Amsterdam reizen. Conclusie: ze reizen *vanuit* Amsterdam.
En dan is het recht-toe-rechtaan (waarbij we aannemen dat auto's in 0 tijd tot stilstand kunnen komen).

- De file staat stil. Stilstaande auto's nemen 5 meter in beslag. Om 20 km te vullen zijn er 20000/5 auto's nodig. Dat zijn er 4000.
- De auto's aan de achterkant komen met 100 km per uur = 27,777 m/s aan, en nemen 44 meter in beslag. Er rijdt dus iedere 44/27,777 = 1,584 seconde een auto het baanvak in.
- Er bevinden zich al 20000/44 = 454,54 auto's in het baanvak. Om het baanvak vol te krijgen hebben we nog 4000 – 454 = 3545,46 auto's nodig.
- 3545,46 auto's, 1 auto iedere 1,584 seconde = 5616 seconden = 1 uur, 33 minuten en 36 seconden.

Oftewel de formule is: ((20000/5) – (20000/44)) × 44/(100000/3600) seconden.

De oplossing van Gerhard Riphagen

Als je het probleem als volgt benadert, ziet het er ineens verrassend eenvoudig uit en kan het met nog minder rekenwerk opgelost worden.

- Een rijdende auto heeft 44 meter van de weg nodig, terwijl een stilstaande auto in de file maar 5 meter weg gebruikt. Bij het ontstaan van de file vindt er als het ware een "compressie" van de auto's op de weg plaats.
- Wat eerst nog reed op 44 meter, staat nu stil op 5 meter; compressiefactor: 44/5 = 8,8
- En dus óók omgekeerd: de 20 km auto's die nu stilstaan in de file, hebben in betere (?) tijden een rij van 8,8 × 20 = 176 km rijdende auto's gevormd. (Hoe dat ooit uit Amsterdam heeft moeten komen kan ik me eigenlijk ook niet voorstellen.)
- Maar, toen de voorste auto 20 km buiten van Amsterdam in de file tot stilstand kwam, moest de achterste nog 156 km doorrijden om vervolgens ook aan te mogen sluiten bij de staart van die 20 km. file.
- Bij 100 km/uur duurt dat 1,56 uur (= 1 uur 33 min en 36 sec).

Zo lang duurt het voor de file tot 20 km lengte is aangegroeid.

SERVICEPAGINA

Examenbesprekingen
Zie pag. 224 in *Euclides* 87(5).

maandag 21 mei, Utrecht
Centrale bespreking examen vwo-B

woensdag 23 mei, Utrecht
Centrale bespreking examen vmbo-TGB

donderdag 24 mei
Regionale besprekingen examen vwo-A/C

vrijdag 25 mei
Centrale bespreking havo-B (Utrecht)
Regionale besprekingen examen havo-A

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	26 juni 2012	1 mei 2012

jaargang 88

1	11 september 2012	17 jul 2012
2	23 oktober 2012	28 aug 2012
3	18 december 2012	23 okt 2012
4	8 februari 2013	4 dec 2012
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

Examens, op de scholen
woensdag 16 mei: Examen vwo-B
maandag 21 mei: Examen vmbo-KB en examen vmbo-GL/TL
dinsdag 22 mei: Examen vwo-A/C
woensdag 23 mei: Examen havo-A
donderdag 24 mei: Examen vmbo-BB en examen havo-B
maandag 18 juni, en daarna: herexamens
Organisatie CvE

vrijdag 25 mei, TU Delft
Maak een model in 1 dag
Organisatie Faculteit EWI, TU Delft

vrijdag 8 juni, Hogeschool Domstad, Utrecht
Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

vrijdag 8 juni, Hogeschool Domstad, Utrecht
Mini-symposium Wiskundedidactiek
Organisatie ELWIeR

vrijdag 15 juni, Utrecht
Bèta onder de Dom
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

za. 30 juni, zo. 1 juli, Blankenberge (B)
16e Congres Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars
Organisatie VVWL

ma. 30 juli t/m vr. 3 aug (kamp C)
ma. 6 t/m vr. 10 aug (kamp A)
ma. 13 t/m vr. 17 aug (kamp B)
Zomerkampen 2012 in Lunteren
Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde
Zie pag. 223 in *Euclides* 87(5).

ma. 20 t/m vr. 31 augustus, Utrecht
Summer School: Mathematics Education
Organisatie Universiteit Utrecht

vr. 24 en za. 25 augustus, Eindhoven
Vakantiecursus
Organisatie CWI

vr. 31 en za. 1 september, Amsterdam
Vakantiecursus
Organisatie CWI

zaterdag 3 november
NVvW-jaarvergadering en studiedag
Organisatie NVvW